OpenGL - Cours pour les TP 5 et 6

Systèmes dynamiques

Ce mini-cours présente brièvement les principes d'animation physique dont vous aurez besoin pour faire les TP 5 et 6.
Pour plus de détails, voir *http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/*.

1 Schéma d'intégration

Nous cherchons à calculer la position q d'une particule. Nous allons utiliser le développement à l'ordre 2 de la formule de Taylor :

$$\dot{q}(t+h) = \dot{q}(t) + h\ddot{q}(t)$$

$$q(t+h) = q(t) + h\dot{q}(t) + h^2\ddot{q}(t)$$

où h représente le pas de temps de l'animation, $\dot{q}$ la dérivée première de q donc la vitesse de la particule et $\ddot{q}$ la dérivée seconde de q donc l'accélération de la particule. Ce schéma présente l'avantage d'être exact pour les accélérations constantes (cas de la chute libre).

Il nous faut donc calculer l'accélération, c'est à dire la dérivée seconde du système ($\ddot{q}$). Cette accélération va être calculée grâce aux lois physiques (Newton, ...). Ainsi, nous allons obtenir des animations et des formes d'aspect naturel.

Principe fondamental de la dynamique (Deuxième loi de Newton) : L'accélération d'une particule i de masse m_i non nulle est donnée par :

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{i \neq j} f_{j\rightarrow i}$$

où $f_{j\rightarrow i}$ est l'ensemble des forces (ou actions) exercées par la particule j sur la particule i.

Principe des actions réciproques (Troisième loi de Newton) : Les forces sont réciproques i.e. pour tout (i, j) :

$$f_{j\rightarrow i} = -f_{i\rightarrow j}.$$

2 Modèles de forces

Pesanteur : Dans une scène terrestre, la pesanteur g est uniforme et applique une force, appelée poids, proportionnelle à la masse :

$$f_{G->i} = m_i g.$$

Il faut bien remarquer que g est un vecteur et non un scalaire.

Ressort : Un ressort sert à simuler un comportement élastique qui tend à ramener deux particules à une distance donnée l'une de l'autre. Cette distance est appelée distance au repos. L'action d'un ressort dépend de sa distance au repos l et de sa raideur k (*stiffness* en anglais) :

$$f^k_{j\to i} = k(\|q_i - q_j\| - l)\frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

Ressort amorti : Amortir (*damp* en anglais) un ressort sert à réduire le mouvement relatif des deux particules. La force d'un amortisseur est proportionnelle à sa viscosité ν et à sa vitesse d'allongement (différence des vitesses des deux particules projetées sur la direction du ressort) :

$$f^\nu_{j\to i} = \nu((\dot{q}_i - \dot{q}_j).\frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|})\frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

L'action totale d'un ressort se calcule en sommant les différentes contributions du ressort et de l'amortisseur :

$$f_{j\to i} = f^k_{j\to i} + f^\nu_{j\to i}.$$

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent se représenter par des ressorts amortis, par exemple les corps déformables élastiques.

Amortissement : La viscosité d'un milieu s'oppose au mouvement des corps qui s'y déplacent. Elle se modélise par une action proportionnelle au coefficient de viscosité ν s'exerçant dans la direction opposée à la vitesse :

$$f_{V\to i} = -\nu \dot{q}_i.$$

3 Collisions

Nous allons étudier la collision entre une particule et un plan. Le traitement de la collision s'effectue en trois temps :

1. détection de collision ;
2. choc ;
3. rebond.

Détection de collison : La détection de collision est un problème très complexe en général. Pour une particule contre un plan, la particule pénètre le plan si la distance de la particule au plan est négative, autrement dit :

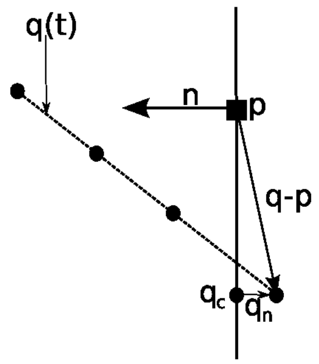
$$(q - p).n < 0$$

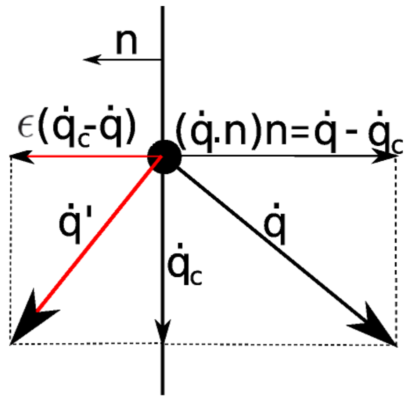
où le plan est représenté par un point p et une normale n.

Choc : Une fois la collision détectée, on cherche dans quelle configuration seraient les objets si le choc était parfaitement absorbant. Dans notre cas, on cherche donc la position q_c de la particule si le plan absorbait entièrement l'énergie du choc. Cela revient à projeter la particule et sa vitesse sur le plan, soit, en notant $q_n = ((q-p).n)n$:

$$q_c = q - q_n$$

$$\dot{q}_c = \dot{q} - (\dot{q}.n)n$$





Rebond : Le rebond correspond à la restitution de l'énergie absorbée au cours du choc. On le caractérise par un coefficient ϵ (variable `rebond` dans le TP) normalement compris entre 0 (choc parfaitement absorbant) et 1 (choc parfaitement élastique). La différence entre la configuration de choc mou et la configuration de choc parfaitement absorbant est reportée proportionnellement à ϵ :

$$\dot{q}' = \dot{q}_c + \epsilon(\dot{q}_c - \dot{q})$$

soit :

$$\dot{q}' = \dot{q} - (1+\epsilon)(\dot{q}.n)n$$