# Exercices analytiques

Antoine Bouthors

13 mai 2005

## Table des matières



# 1 Hémi-volume

**Enoncé :**
*Un hémi-volume délimité par un plan. Une direction de lumière, une direction de vue (du même cote'). Opacité' constante. Single-scattering isotrope (proportionnel à l'opacité). -¿ quelle intensité voit l'oeil ?*

C'est ce qu'a fait Blinn[Bli82] sur Saturne. Ca se résume à :

$$B = w\phi(a)\frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\left(1+e^{-\tau(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu})}\right)$$

Avec

- $B$ Intensité renvoyée
- $w$ albédo
- $a = \vec{L}.\vec{E}$
- $\mu = \vec{N}.\vec{E}$
- $\mu_0 = \vec{N}.\vec{L}$
- $\phi$ fonction de phase
- $\tau = n\pi p^2 T =$ "profondeur optique"
- $n$ densité de particules par unité de volume
- $p$ rayon d'une particule
- $T$ Epaisseur de la couche de nuage

En particulier, comme on a une couche infinie, ça se simplifie à :

$$B = w\phi(a)\frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}$$

C'est une fonction décrite par Hapke[Hap63] et Irvine[Irv66].

# 2 Cube plein de gouttes

**Enoncé :**
*Un volume cubique plein de gouttes (cubiques ou sphériques, comme c'est le plus simple). Un paramètre est bien sur le volume total de liquide (ou la proportion par rapport au volume total), mais aussi et surtout le nombre de gouttes (ou leur rayon) en lequel il est subdivisé. -¿ quelle opacité résultante ? (= atténuation d'un rayon qui traverse toute l'épaisseur). (Par contre j'ai jamais essayé de calculer la rétro-réflexion, tiens !)*

**Raisonnement de Fabrice :**

$N$ gouttes opaques cubiques de diamètre $d$ dans une tranche de surface $S$ et d'épaisseur = distance intergouttes, ca donne une opacité $A = \frac{Nd^2}{S}$ pour la tranche. Ensuite on blend les tranches : les $T$ $(= 1 - A)$ se multiplient, donc $Atot = 1 - (1 - A)^k$ où $k$ est le nombrre de tranches. Le fait que les $T$ se multiplient vient de ce que $T = e^{-\tau\rho dl}$ sachant que les $dl$ s'additionnent.

**Reprise :**
Je vais essayer de retracer ton raisonnement :

- En prenant l'épaisseur de la couche = distance intergouttes, ça te permet d'ignorer une dimension : il y a en moyenne une goutte dans la direction z, calculer l'opacité de la tranche revient à calculer l'opacité d'un plan peuplé de gouttes carrées, on aboutit sans trop de problèmes à $\frac{Nd^2}{S}$
- $T = 1 - A$ ça va je suis encore :)
- Les transparences se multiplient, ok intuitivement, donc donc $Atot = 1 - (1 - A)^k$ et $Ttot = T^k$
- $T = e^{-\tau\rho dl}$ euh là je suis largué : c'est quoi $\tau$ (profondeur optique ?), $\rho$ (densité ?) et $dl$ (élément de longueur ?) ?

Bon ok au final j'ai compris la majeure partie.
D'après Blinn : $T = e^{-\frac{\tau}{\mu}}$ avec les $\tau$ et $\mu$ définis dans le premier exercice.

**Rétro-réflexion :** Pour la rétro-réflexion par contre, il faut une fonction de phase, et là on revient sur le premier exercice. La différence est qu'ici on a pas un demi-volume infini, mais un volume bien délimité. Blinn nous a déjà mâché le travail avec la tranche d'épaisseur finie, *cf.* premier exercice.

# 3 Tranche de volume

**Enoncé :**
*Une tranche de volume infinie continue et homogène délimitée par 2 plans (donc on peut se ramener a du 1D). Illumination incidente $L_1$ en haut et $L_2$ en bas (ou $L_1$ et 0, ou $L_1$ et réflecteur, ou $L_1$ et absorbant). On peut se limiter a un volume (ou segment 1D) discrétisé en petits cubes. Dans les cellules, réflexion isotrope, ou directionnelle dans une proportion (a,1-a). pas d'absorbtion (mais on peut jouer). → quelle quantité de lumière traverse / est réémise a l'envoyeur ?*

On découpe le volume (1D) en petits cubes. Pour un cube $i$, la lumière qu'il envoie vers le bas est notée $D_i$ et la lumière qu'il envoie vers le haut est notée $U_i$. Le cube d'indice $-1$ représente l'espace au-dessus de la couche, celui d'indice $n + 1$

$$
\begin{array}{|r|l}
\hline
-1 & \uparrow U_{-1} = U_0 \\
 & \downarrow D_{-1} = L_1 \\
\hline
\vdots & \\
\hline
i-1 & \\
\hline
i & \uparrow U_i \\
 & \downarrow D_i \\
\hline
i+1 & \\
\hline
\vdots & \\
\hline
n+1 & \uparrow U_{n+1} = L_2 \\
 & \downarrow D_{n+1} = D_n \\
\hline
\end{array}
$$

## 3.1 Pas d'absorption

Sans absorption, on définit $D_i$ et $U_i$ comme ça :

$$D_i = aD_{i-1} + \bar{a}U_{i+1} \qquad \forall i,\ 0 \leq i \leq n \tag{1}$$
$$U_i = \bar{a}D_{i-1} + aU_{i+1} \qquad \forall i,\ 0 \leq i \leq n \tag{2}$$
$$D_{-1} = L_1 \tag{3}$$
$$U_{n+1} = L_2 \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

avec $\bar{a} = 1 - a$

On définit $S_i$ tel que :

$$\begin{aligned} S_i &= D_i - U_i && (6)\\ \Leftrightarrow S_i &= aD_{i-1} + (1-a)U_{i+1} - (1-a)D_{i-1} - aU_{i+1} && (7)\\ \Leftrightarrow S_i &= (2a-1)(D_{i-1} - U_{i+1}) && (8) \end{aligned}$$

Puis on exprime $D_{i+1}$ et $U_{i+1}$ uniquement en fonction de $D_i$ et $U_i$ :

$$\begin{aligned} aU_i - \bar{a}D_i &= a^2U_{i+1} + a\bar{a}D_{i-1} - a\bar{a}D_{i-1} - \bar{a}^2U_{i+1} && (9)\\ \Rightarrow aU_i - \bar{a}D_i &= (a^2 - \bar{a}^2)U_{i+1} && (10)\\ \Rightarrow U_{i+1} &= \frac{aU_i - \bar{a}D_i}{a^2 - \bar{a}^2} && (11)\\ \Rightarrow U_{i+1} &= \frac{a}{2a-1}U_i - \frac{\bar{a}}{2a-1}D_i && (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aD_{i+1} - \bar{a}U_{i+1} &= a^2D_i + a\bar{a}U_{i+2} - a\bar{a}U_{i+2} - \bar{a}^2D_i && (13)\\ \Rightarrow aD_{i+1} - \bar{a}U_{i+1} &= (a^2 - \bar{a}^2)D_i && (14)\\ \Rightarrow D_{i+1} &= \frac{(a^2 - \bar{a}^2)D_i + \bar{a}U_{i+1}}{a} && (15)\\ \Rightarrow D_{i+1} &= \frac{2a-1}{a}D_i + \frac{\bar{a}}{a}U_{i+1} && (16)\\ (16) \text{ et } (12) \Rightarrow D_{i+1} &= \frac{2a-1}{a}D_i + \frac{\bar{a}}{a}\left(\frac{a}{2a-1}U_i - \frac{\bar{a}}{2a-1}D_i\right) && (17)\\ \Rightarrow D_{i+1} &= \frac{3a-2}{2a-1}D_i + \frac{\bar{a}}{2a-1}U_i && (18) \end{aligned}$$

Et maintenant, si on écrit $S_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} (18) \text{ et } (12) \Rightarrow S_{i+1} &= \frac{3a-2}{2a-1}D_i + \frac{\bar{a}}{2a-1}U_i - \frac{a}{2a-1}U_i + \frac{\bar{a}}{2a-1}D_i && (19)\\ \Rightarrow S_{i+1} &= D_i - U_i && (20)\\ \Rightarrow S_{i+1} &= S_i && (21) \end{aligned}$$

$S_i$ est donc une constante pour tout $i$ :

$$S_i = \text{const} = \phi \tag{22}$$

$$\begin{aligned} (18) \Leftrightarrow D_i &= \frac{2a + a - 1 - 1}{2a-1}D_{i-1} + \frac{1-a}{2a-1}U_{i-1} && (23)\\ \Leftrightarrow D_i &= \frac{2a-1}{2a-1}D_{i-1} + \frac{a-1}{2a-1}D_{i-1} + \frac{1-a}{2a-1}U_{i-1} && (24)\\ \Leftrightarrow D_i &= D_{i-1} - \frac{\bar{a}}{2a-1}\phi && (25)\\ \Leftrightarrow D_i &= D_{-1} - \frac{\bar{a}}{2a-1}\phi(i+1) && (26)\\ (26) \text{ et } (6) \Rightarrow U_i &= D_{-1} - \frac{2-3a}{2a-1}\phi(i+1) && (27) \end{aligned}$$

On calcule $\phi$ :

$$
\begin{aligned}
(22) \text{ et } (6) \Rightarrow \phi &= D_n - U_n && (28)\\
(29) \text{ et } (1) \text{ et } (2) \Rightarrow \phi &= aD_{n-1} + \bar{a}U_{n+1} - (\bar{a}D_{n-1} + aU_{n+1}) && (29)\\
\Leftrightarrow \phi &= aD_{n-1} + \bar{a}L_2 - (\bar{a}D_{n-1} + aL_2) && (30)\\
\Leftrightarrow \phi &= (a - \bar{a})(D_{n-1} - L_2) && (31)\\
\Leftrightarrow \phi &= (2a-1)(D_{-1} - \frac{\bar{a}}{2a-1}\phi n - L_2) && (32)\\
\Leftrightarrow \phi &= (2a-1)(L_1 - L_2) - \bar{a}\phi n && (33)\\
\Leftrightarrow \phi(1 + \bar{a}n) &= (2a-1)(L_1 - L_2) && (34)\\
\Leftrightarrow \phi &= \frac{(2a-1)(L_1 - L_2)}{1 + \bar{a}n} && (35)
\end{aligned}
$$

Au final :

$$
\begin{aligned}
35 \text{ et } 26 \Rightarrow D_i &= L_1 - \frac{\bar{a}(L_1 - L_2)}{1 + \bar{a}n}(i+1) && (36)\\
35 \text{ et } 27 \Rightarrow U_i &= L_1 - \frac{(2-3a)(L_1 - L_2)}{1 + \bar{a}n}(i+1) && (37)
\end{aligned}
$$

### 3.2 Avec absorption

Pour l'instant j'ai pas trouvé de solution analytique...

## Références


[Bli82] James F. Blinn. Light reflection functions for simulation of clouds and dusty surfaces. In *Proc. of ACM SIGGRAPH 82*, volume 16, pages 21–29, July 1982. 1

[Hap63] Bruce W. Hapke. A theoretical photometric function for the lunar surface. *Journal of Geophysical Research*, 68(15) :4571–4586, 1963. 1

[Irv66] W. M. Irvine. The shadowing effect in diffuse reflection. *Journal of Geophysical Research*, 71 :2931–2937, 1966. 1