

Algèbre Linéaire (et au delà)

rendue intuitive 😊

Fabrice NEYRET mars 2025

disclaimer:

But = donner des intuitions.

→

- qq abus de notations pratiques
- pas toutes les preuves
- pas tous les cas particuliers

Géométrie par l'Algèbre

résoudre géométrie avec des équations

Mais on peut faire des équations sans coordonnées !

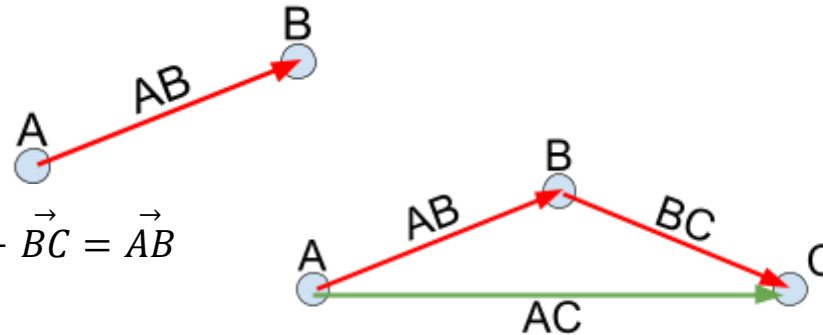
Points, vecteurs, tangentes, normales

[J1 - #1: (1h)]

points A,B

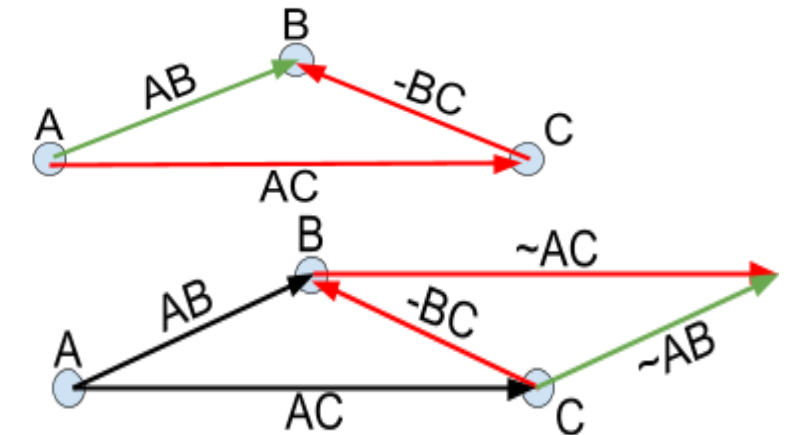
→ vecteur $\vec{AB} = B - A \sim$ tangente.

composition: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, $\vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AB}$



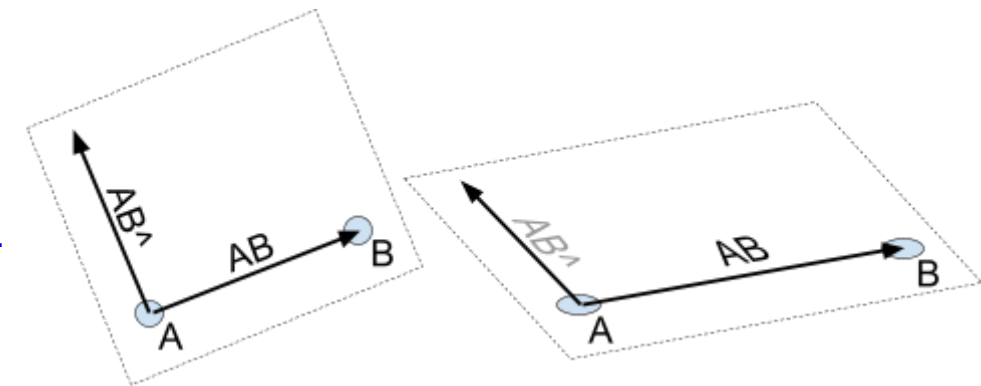
vecteur $\neq$ segment: classe d'équivalence (ex: parallélogramme)

vecteur $\neq$ point (même si deux float[dim]), mais abus notation ok



Δ : orthogonal (normale) = covecteur.

si déformation spatiale, les tangentes se transforment comme les points,
mais pas les covecteurs: définis par l'angle, qui ne se conserve pas forcément.



Produit scalaire et construction des transformations

cercle trigo : $\vec{r} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = 2 \text{ projs} = \text{coords}$

$$\text{PS} = U \cdot V = (U, V) = \langle U, V \rangle \sim \cos(\hat{UV}) \quad ||U|| \cdot ||V|| \cdot \cos(\hat{UV})$$

→ projection de U sur V: $||\vec{p}|| = ||U|| \cdot \cos()$ → $\vec{p} = (U \cdot \frac{V}{||V||}) \cdot \frac{V}{||V||}$

→ vec hauteur de V à U: $\vec{h} = -(-U + \vec{p}) = U - \vec{p}$
 = proj sur $U^\perp$ (i.e. façon de construire une perpendiculaire) vérif: $\vec{h} \cdot V = 0$

norme $||h||$ donne la distance du point U à la droite $\sim V$

$$||h||^2 = h \cdot h$$

$$\text{propriété: } ||a + b||^2 \approx (a + b)^2: (a + b) \cdot (a + b) = (a \cdot a) + 2(a \cdot b) + (b \cdot b) = ||a||^2 + 2a \cdot b + ||b||^2$$

$$\rightarrow ||\vec{h}||^2 = ||U - \vec{p}||^2 = ||U||^2 - 2(U \cdot \vec{p}) + ||\vec{p}||^2 = ||U||^2 - 2(U \cdot \frac{V}{||V||})^2 + (U \cdot \frac{V}{||V||})^2 = ||U||^2 - (U \cdot \frac{V}{||V||})^2 \sim \sin^2 = 1 - \cos^2$$

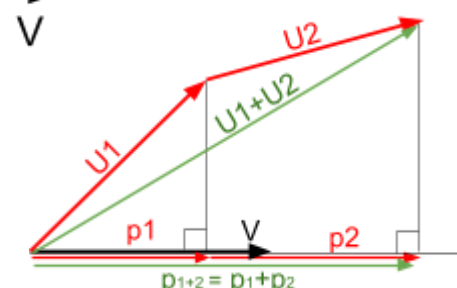
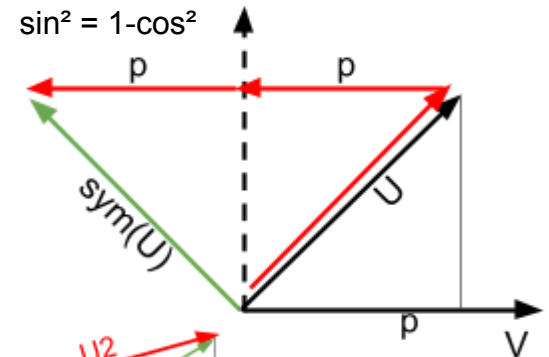
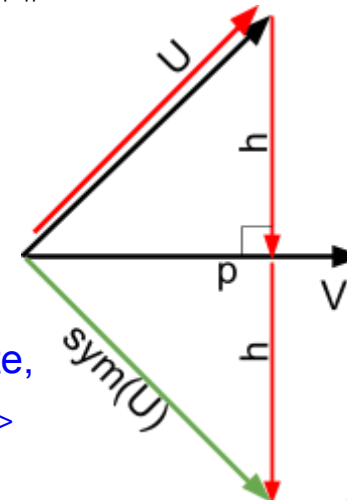
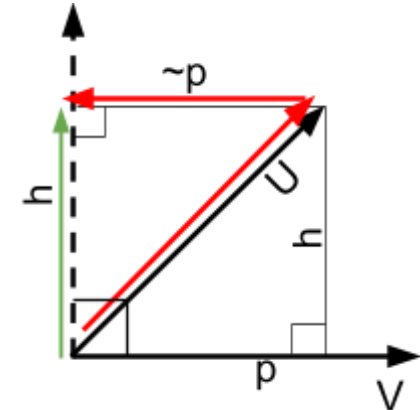
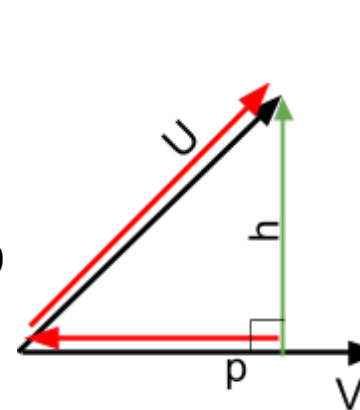
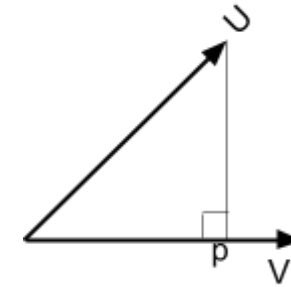
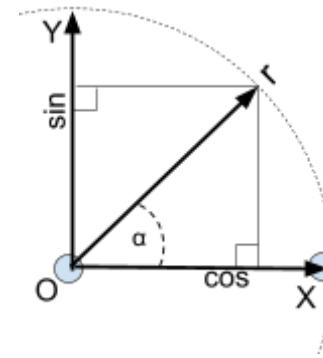
→ symétrie de U % V: $U - 2\vec{h} = U - 2(U - \vec{p}) = 2\vec{p} - U$

symétrie de U % $V^\perp$: $U - 2\vec{p} = -\text{reflect}$

PS = *forme bilinéaire*:

linéaire à gauche $\langle U_1 + U_2, V \rangle = \langle U_1, V \rangle + \langle U_2, V \rangle$, linéaire à droite,
 mais pas linéaire en "tout": $\langle U_1 + U_2, V_1 + V_2 \rangle \neq \langle U_1, V_1 \rangle + \langle U_2, V_2 \rangle$

→ Δ: mot "linéaire" tout seul ne veut rien dire. expliciter contexte.

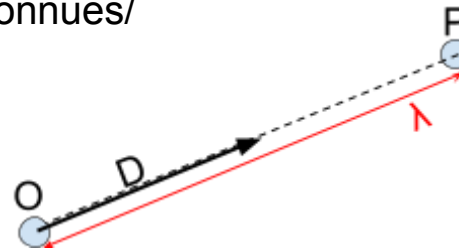


Formes, intersection avec un rayon

écrire ce qu'on sait, paramétré avec les inconnues/

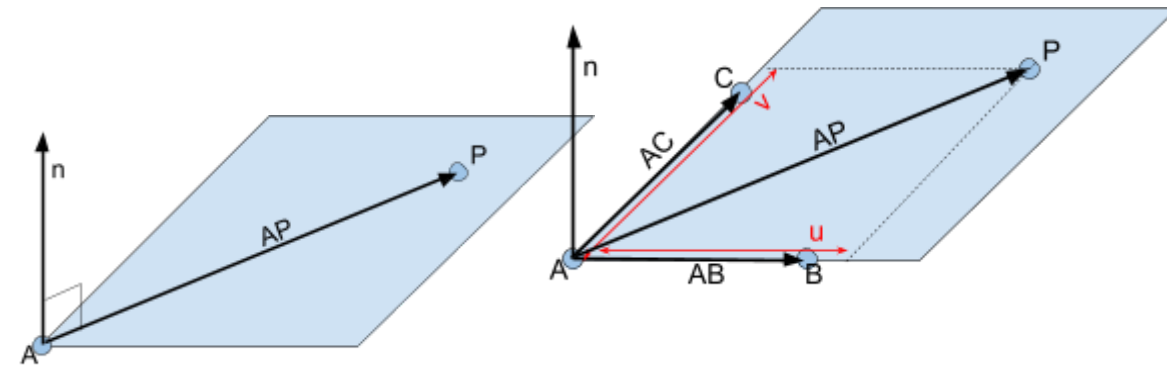
équation droite (origine O, direction D) :

$$P = O + \lambda D$$



équation plan (passant par A, de normale n) :

$$AP \cdot n = 0 \quad (\text{ou: contenant A,B,C}): P = A + u \cdot AB + v \cdot AC$$



équation sphere (centre C, rayon r) :

$$\text{dist}(P, C) = r = ||CP|| \quad (CP, CP) = r^2 \rightarrow ||P||^2 - 2 \cdot P \cdot C + ||C||^2 - r^2 = 0 \quad (\text{abus notation} \rightarrow ||OP||^2 - 2 \cdot OP \cdot OC \dots)$$

passage aux coordonnées (si besoin, au dernier moment. Jusque là, nD, pas de repère: intrinsèque)

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xC_x - 2yC_y - 2zC_z + ||C||^2 - r^2 = 0$$

équation cylindre (passant par A, axe a):

$$\text{dist}(P, a) = r = ||AP - (AP \cdot a)a||$$

$$\rightarrow \text{carré: } ||AP||^2 - (AP \cdot a)^2 = r^2$$

cf <https://www.desmos.com/3d/009430258a>

intersection rayon-sphere:

$$P = O + \lambda D, \quad ||CP|| = r$$

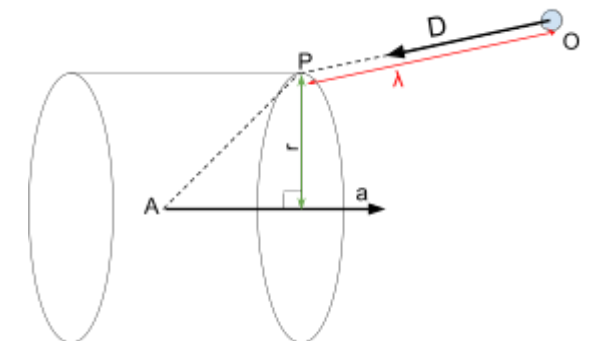
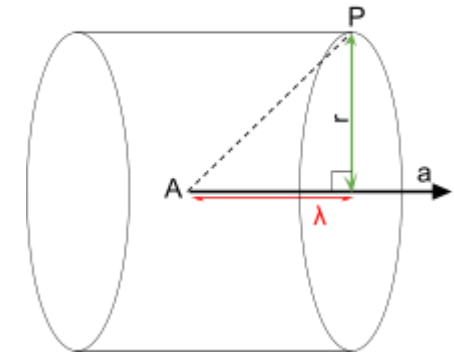
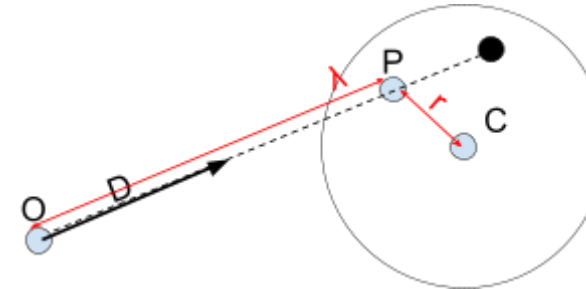
$$||O + \lambda D - C||^2 = ||CO||^2 - 2\lambda OC \cdot D + \lambda^2 = r^2$$

$$\rightarrow \lambda = \dots$$

cf <https://www.desmos.com/3d/6c102e4a65>

intersection rayon-cylindre: exercice

cf <https://www.desmos.com/3d/009430258a>



Systèmes d'équations et Matrices

[#2: (1h)]

intersection rayon-plan:

$$P = O + \lambda D, \quad P = A + u.AB + v.AC$$

$$\rightarrow u.AB + v.AC - \lambda.D = AO$$

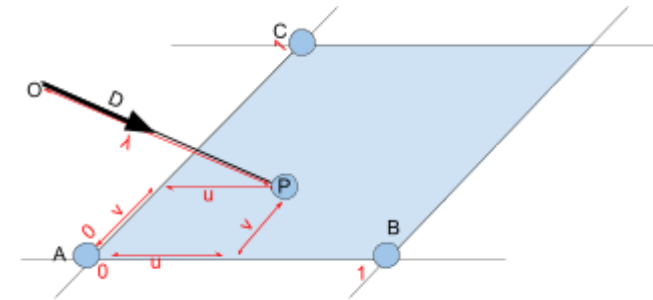
“ $x.x' + y.y' + z.z'$ ”: ~ PS !

$$= (AB, AC, -D) \cdot (u; v; \lambda) = M.U = AO \quad \begin{array}{l} M = \text{vecteur de vecteurs} = \text{matrice} \\ \rightarrow U = M^{-1}.AO \end{array}$$

Analogie scalaire : $m.u = a \rightarrow u = a/m = (1/m).a$

vectorel: similaire, mais Δ : mult matrice pas commutatif

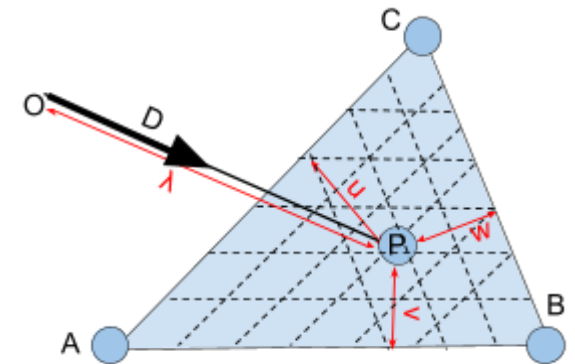
Astuce safe: éliminer en multipliant à gauche par M^{-1}



intersection rayon-triangle:

intersec plan $\rightarrow$ coordonnées u, v, λ

vérif si $(u, v, w) \in [0, 1]$ $w = 1 - u - v$



Apartée:

Δ notation des vecteurs:

France: vecteur colonne $\rightarrow M \cdot U$ $\text{dot}(a, b) = a^t \cdot b$ parfois noté $(;).(,)$

USA : vecteur ligne $\rightarrow U \cdot M$ (= notre $U^t \cdot M^t$)

+ pb ordre stockage des matrices.

matrice-vecteur: interprétation 1: $(A ; B) \cdot (u, v) = uA + vB$

interprétation 2: $(A, B) \cdot (u, v) = (A \cdot U, B \cdot U)$ = coordonnées de U dans repère orthonormé AB

normalement c'est $M^{-1}U$, mais si ortho $M^{-1} = M^t$

Inversion de matrices (/ systèmes) :

NB: calcul M^{-1} : pas reprogrammer, utiliser une librairie de solveur math !

Si calcul à la main: "méthode des pivots" = élimination de Gauss-Jordan: (naïf : coûteux et pas robuste)

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{élimination progressive} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \end{array}$$

Interprétations géométriques (en 2D)

connaissant (A,B,C) et P, trouver (u,v)

coord barycentriques: $P = wA + uB + vC$, $u + v + w = 1 \rightarrow AP = uAB + vAC$
(comme slide précédent, en 2D 😊)

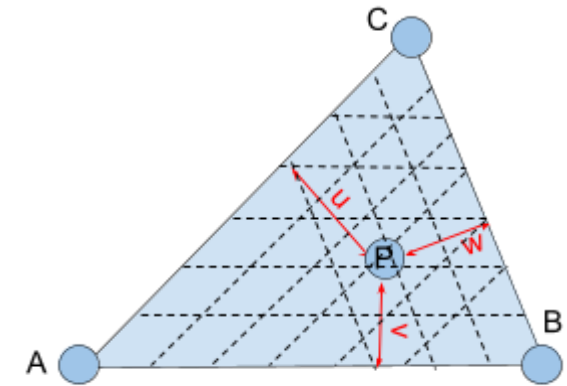
$\rightarrow$
 $P = A + uAB + vAC \rightarrow (AB; AC) \cdot (u, v) = M \cdot U = AP$
 $\rightarrow U = M^{-1} \cdot AP \in \text{triangle si } (u, v, w) \in [0, 1] \quad w = 1 - u - v$

résolution à la main: (en fait, revient au pivot: interprétation géométrique).

$$uAB + vAC = AP$$

$$AC \perp \cdot : uAC \perp \cdot AB + 0 = AC \perp \cdot AP \rightarrow u = \frac{AC \perp \cdot AP}{AC \perp \cdot AB}$$

$$AB \perp \cdot : 0 + vAB \perp \cdot AC = AB \perp \cdot AP \rightarrow v = \frac{AB \perp \cdot AP}{AB \perp \cdot AC} \quad M^{-1} = \frac{(AC \perp; AB \perp)}{AB \perp \cdot AC} \quad (\text{denom.} = \det(M))$$



Changement de repère monde $\leftrightarrow$ repère (u,v)

Déplacement en espace (u,v): $P + \vec{d}$. NB: intrinsèque. par contre coordonnées dans un espace (i.e. repère).

Espace X: $P_X + \vec{d}_X$, $\vec{d}_X = (dx, dy)$

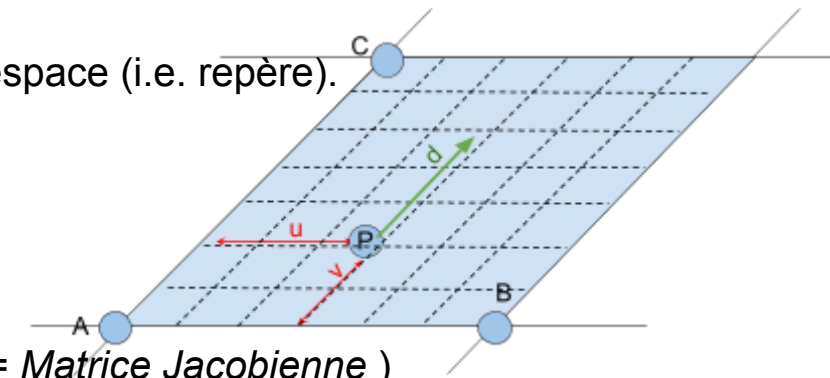
Espace U: $P_U + \vec{d}_U$, $\vec{d}_U = (du, dv)$ $P_U = M^{-1} \cdot P_X$

passage U $\rightarrow$ X: $P_X + du \cdot AB_X + dv \cdot AC_X = P_X + M \cdot \vec{d}_U$
 $M \cdot P_U$ $M_{U \rightarrow X}$: matrice changement repère (= Matrice Jacobienne)

NB: $P_U + du \cdot AB_U + dv \cdot AC_U = P_U + du \cdot (1, 0) + dv \cdot (0, 1) = P_U + \vec{d}_U$: $P + (AB; AC) \cdot \vec{d}_U$ dans repère au choix

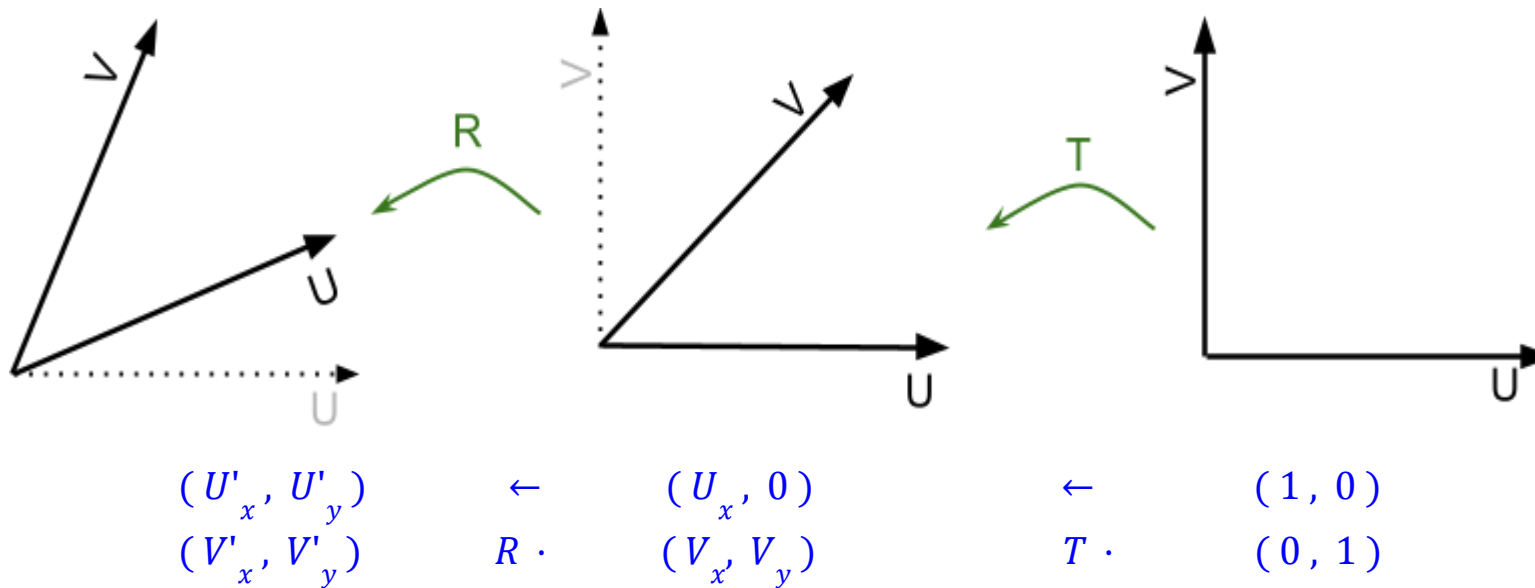


passage X $\rightarrow$ U: $P_U + M^{-1} \vec{d}_x$



Décomposition des matrices (et interprétation géométrique) :

[J2 - #3: (1h)]



$$P_X = M \cdot P_U = R \cdot T \cdot P_U$$

= décomposition “QR” : toute matrice carrée peut se décomposer
 nD: Q = matrice *normale* (=orthonormée), R = matrice triangulaire
[algo de décompositions](#) : Gram-Schmidt, Householder, Givens...

utilité:

résoudre $M \cdot A = B$

$$\rightarrow R \cdot T \cdot A = B \quad R^{-1} = R^t \text{ i.e., } \text{rot}^{-1}(\alpha) = \text{rot}(-\alpha)$$

$$\rightarrow T \cdot A = R^t \cdot B$$

→ élimination en cascade (“pivot tout prêt”)

NB: il existe d'[autres décompositions](#): LU, $U^* U$ (Cholesky), SVD, eigen (spectal) ...

Transformations & changements de repères (suite):

Si $f(P_0) = 0$ définit une forme (ex, un cercle de rayon 1) :

pour scaler la forme par r , il faut faire $f(\frac{P}{r})$ inverse de l'intuition de scaling ($\rightarrow$ façon shaders)

idée: $P = r \cdot P_0 \rightarrow$ se faire passer pour $P_0 = \frac{P}{r}$ dans eqn $\Rightarrow f(\frac{P}{r})$

pour la scaler différemment dans les 2 axes (ex, ellipse):

$$P = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix} \cdot P_0 = D \cdot P_0 \rightarrow f(D^{-1} \cdot P)$$

puis pour la faire tourner: $P = \text{rot}(\text{scale}(P_0)) = R \cdot S \cdot P_0 \rightarrow f(S^{-1} \cdot R^{-1} \cdot P)$

(attention, op pas commutatives: $\text{scale}(\text{rot}(P_0))$ déforme différemment: cercle invariant par rot $\rightarrow$ juste scale)

plus généralement, changement de repère: $P = J \cdot P_0 \rightarrow f(J^{-1} \cdot P)$

NB: si matrice orthonormé (transformation solide, i.e., rot) $\rightarrow$ inverse = transpose

→ application:

Ellipse/Ellipsoïde = cercle/sphère dans un repère tordu

$$f(P) = x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{cercle}(1) = ||P||^2 = P^t \cdot P \leftarrow \text{importance du } t: \text{ cf dessous. vérif: } ||\text{rot}(P)||^2 = P^t \cdot R^t \cdot R \cdot P$$

$$f\left(\frac{P}{r}\right) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{cercle}(r) = \left\|\frac{P}{r}\right\|^2$$

$$f(D^{-1} \cdot P) = \left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{ellipse}(r_x, r_y) = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{r_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_y} \end{pmatrix} \cdot P \right\|^2 = ||D^{-1} \cdot P||^2 = P^t \cdot D^{-2} \cdot P : \text{forme quadratique.}$$

$U^t \cdot M \cdot V$ = lin à gauche et à droite = bilinéaire (comme le PS - et pour cause: PS à poids)

$$\text{ellipse tournée: } P = \text{rot}(\text{scale}(P_0)) \rightarrow ||S^{-1} \cdot R^{-1} \cdot P||^2 = 1 = P^t \cdot R^{-1t} \cdot S^{-2} \cdot R^{-1} \cdot P = P^t \cdot R \cdot S^{-2} \cdot R^{-1} \cdot P$$

(attention, op pas commutatives: $\text{scale}(\text{rot}(P_0)) \rightarrow S^{-1} \cdot R \cdot R^{-1} \cdot S^{-1} = S^{-2}$)

$$\text{plus généralement, changement de repère: } P = J \cdot P_0 \rightarrow P^t \cdot J^{-1t} J^{-1} \cdot P = ||P_0||^2 \rightarrow P^t \cdot Q \cdot P = 1$$

$$\rightarrow \text{equation ellipse } (x; y). (a; b, b; c). (x, y) = ax^2 + 2b \cdot xy + cy^2$$

→ cercle en espace texture tordu apparait comme une ellipse

→ cercle sur une surface 3D apparait comme une ellipse à l'écran

(si mapping non-lin ou surface non-plate, ~ok si petit cercle).

Attention: forme quadratique générale est plus riche (e.g. hyperboles).

Ici, coefs particuliers: Q symétrique, diag > 0 .

Sym → peut tj se décomposer en $R \cdot D \cdot R^{-1}$

diag > 0 → peut tj $R \cdot S^{-2} \cdot R^{-1} \rightarrow M^t \cdot M \rightarrow ||M \cdot P||^2$

Précision:

→ attention: ambiguïté du sens de "*appliquer un changement de repère à la matrice*" :
3 situations cousines mais différentes d'usage des matrices / transformations

- trouver coords par changement de repère:

$$M : U \rightarrow X : X = M \cdot U$$

- définir une forme par changement de repère :

$$\text{ellipse: } X^t \cdot M \cdot X = 1 = V^t \cdot D^{-2} \cdot V = U^t \cdot Id \cdot U = ||U||^2$$

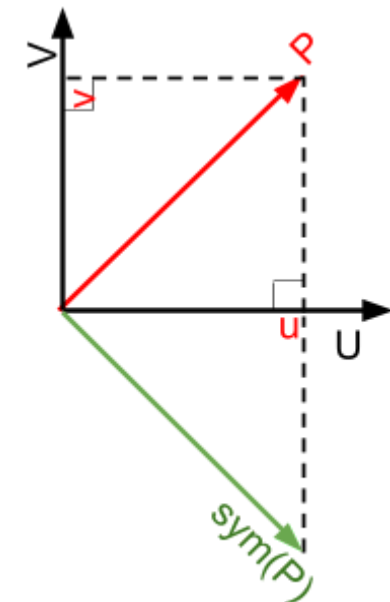
- définir une transformation de l'espace $X \rightarrow X'$ (symétrie, projection, ...) depuis repère canonique:

ex: symétrie axe A:

dans repère $(A, A^\perp)$ on a $U' = M \cdot U$ avec $M = (1, 0; 0, -1)$

on la veut dans le repère (x, y) : $X = R \cdot U$

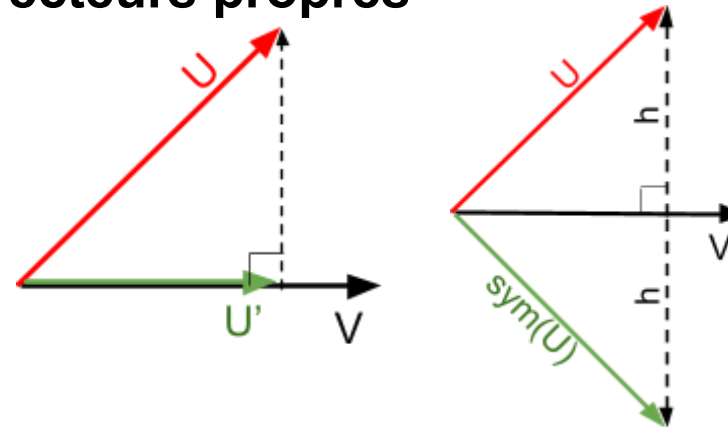
$$\rightarrow R^{-1} \cdot X' = M \cdot R^{-1} \cdot X \rightarrow X' = R \cdot M \cdot R^{-1} \cdot X = M' \cdot X \rightarrow \text{matrices semblables}$$



repères privilégiés: valeurs propres, vecteurs propres

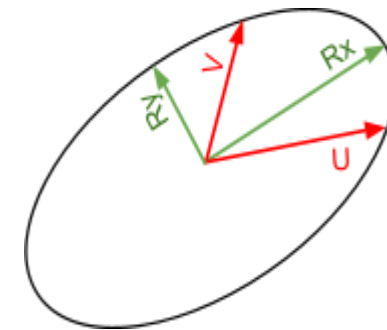
$$? V, \lambda \mid M \cdot V = \lambda V$$

- cas triviaux résolu à vue: projection, symétrie.



- ellipse: on a la matrice de la forme bilin, on voudrait retrouver axes et rayons de l'ellipse:

$$Q.A_x = \frac{1}{r_x^2} A_x = M^t M.A_x, \quad M.A_x = \frac{1}{r_x} A_x, \dots$$



→ si n vp, decomp cas général à partir de cette base de cas simples:

$$V = uV_1 + vV_2 \rightarrow M.V = u\lambda_1 V_1 + v\lambda_2 V_2 = D_{V_1, V_2} \cdot U, \quad D_{V_1, V_2} = \text{diag}(\lambda_i)$$

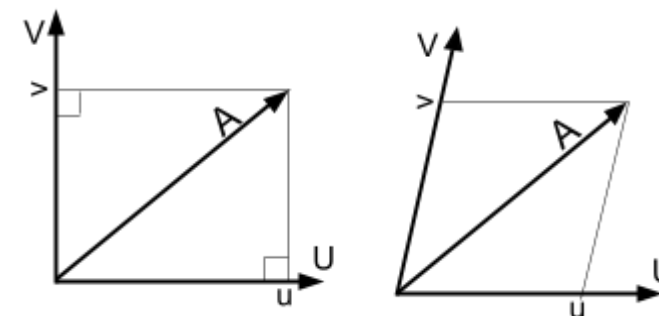
- plus généralement, diagonalisation: repère où la matrice est triviale (diagonale) (quand la transfo le permet)

$$\rightarrow M = P.D.P^{-1} \rightarrow P^{-1}.M.P = D \quad (\text{NB: pas tj possible dans } R^n) \quad \text{NB: "matrices semblables"}$$

$$\rightarrow \text{NB: application: } M^k = P^{-1}.D^k.P, \quad \exp(M) = P^{-1}.\exp(D).P, \dots$$

$$\text{si } M \text{ symétrique} \rightarrow P \text{ "normale" (= orthonormée) : } P^{-1} = P^t$$

preuve: on trouve les coordonnées par simple PS avec les axes, $(U;V) = P^t$



méthode générale pour trouver vp, VP:

préalable: nombres caractéristiques d'une matrice: spectre: $\{vp\}$

norme: plusieurs def. norme Frobenius $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |M_{i,j}|^2}$ (généralise vec de vec)

déterminant = 2D: produit vectoriel 3D: produit mixte (= aire / volume du repère)

trace = $\sum diag = \sum_i M_{i,i}$ NB: $\|M\|_F = \sqrt{Tr(M^* M)}$ → trace peut définir un PS de matrices = $Tr(A, B)$

propriétés déterminant: ~multiplication

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B), \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(kM) = k^n \det(M)$$

inchangé par transpose, changement de repère (matrice semblable) car $\det(P^{-1} \cdot M \cdot P) = \det(M)$, transfo solide car $\det(P \cdot R) = \det(P)$

vp conservées aussi → $\det(M) = \det(D) = \prod \lambda_i$ car $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

matrice triangulaire: $\det = \prod diag$

matrice par blocs: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A \cdot D - B \cdot C)$

propriétés trace: ~addition

inchangée par transpose et changement de repère

$$\rightarrow \text{trace} = \sum \lambda_i$$

linéaire: $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(kA) = kTr(A)$

$$\det(e^M) = e^{Tr(M)}$$

méthode générale pour trouver vp, VP (suite):

$$M.V = \lambda.V \rightarrow (M - \lambda Id).V = 0 \rightarrow \det = 0 \rightarrow \text{polynome}(\lambda) = 0, \text{ solve} \rightarrow vp \lambda \text{ (si pol soluble)}$$
$$\rightarrow VP: \text{trouver } V_1 \mid (M - \lambda_1.I).V_1 = 0$$

même principe que pour inverser (pivot), sauf que pas inversible: $V_1 \neq M'^{-1}.0$
ce qui reste (redondant, pas rang n) définit une droite = l'axe du VP.

cas particuliers:

- cas des vp multiples.
 - cas des vp absentes $\rightarrow$ tj ok dans $\mathbb{C}$! (rotation: vp: $e \pm i\theta$, VP: $(1, \pm i)$)
- $\rightarrow$ espace propre (dim>1) $\rightarrow$ diag par bloc (ex: rot3)

Exercices:

- $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ vp: $-1, 2$, VP = $(1, 2), (1, 1)$
- symétrie: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} c(2\theta) & s(2\theta) \\ s(2\theta) & -c(2\theta) \end{pmatrix}$ vp = $1, -1$, VP = $(c, s), (c, -s)$
- ellipse: $R = \begin{pmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \dots$

Remarques :

polynôme caractéristique = $\det()$ matrice semblable $\text{diag}(\lambda_i - \lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \text{Tr}(M) + \dots + \det(M)$

$$2D : \lambda^2 - \lambda \text{Tr}(M) + \det(M)$$

On a obtenu $M = P.D.P^{-1}$, ou $P.D.P^t$ si M sym ($\Rightarrow Vp \perp$) . mais “pivot” pour VP cher.

parfois on ne veut pas tout le *spectre* $\{vp\}$, mais juste certaines valeurs (ex:max)

→

- NB: si on connaît le Vp $\rightarrow vp = V^t \cdot M \cdot V$ (attention, $\|M \cdot V\|$ perdrait le signe. si on connaît juste dir, prendre $\frac{V}{\|V\|}$)
- interprétation: $M \cdot V = P.D.P^{-1} \cdot V$ dilate anisotropiquement (hyper-ellipsoïde $r = vp$, axes = Vp . + sym si $vp < 0$)

→ juste trouver la + grande vp (en val.abs): *power iterations*

principe: $M^\infty \cdot \text{randvec} \rightarrow \text{largest Vp}$ (sauf si randvec $\perp$, pas de bol 😊)

pratique : $V_0 = \text{randvec}$, $V_{k+1} = \frac{M \cdot V_k}{\|M \cdot V_k\|} \rightarrow \text{Vp associé à vp max.}$

2ème + grande: si M sym, $VP \perp \rightarrow$ idem avec $\text{randvec} \perp Vp_0$ (si besoin, reprojeter à chaque étape: $V_k \leftarrow (V_k \cdot Vp_0) Vp_0$)

+ petite (en val.abs) : M^{-1}

+ proche de λ_0 : $(M - \lambda_0 \cdot I_d)^{-1} : M - kI_d$ a les mêmes Vp, et $vp - k$. preuve: $M \cdot Vp - kI_d \cdot Vp = (\lambda - k)Vp$

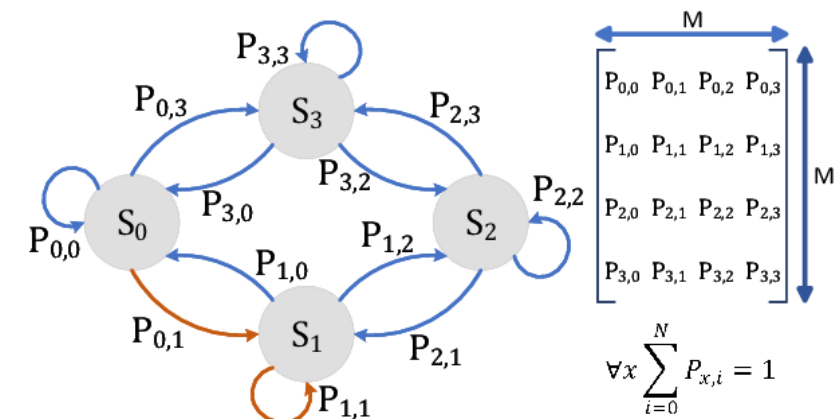
(NB: conditions: diagonalisable, convergence...)

(Vp, vp) de $M \rightarrow (Vp, vp^n)$ de M^n

→ Ex application:

Chaînes de Markov: graphe de transition $\rightarrow M$

→ attracteurs, état stationnaire: $M^\infty \cdot V_0 \rightarrow V \mid M^n \cdot V = V = M \cdot V : Vp(1)$



f(matrix) via développement limité / série de Taylor

$$\exp(x) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x} : \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{attention: conditions}) \rightarrow \ln(1-x), \ln(1+x)$$

$$\sin(x) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\cos(x) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \rightarrow \sin' = \cos$$

→ On peut faire pareil avec les matrices ! ex: $\exp(M) = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \dots$, $M^r = \exp(r \cdot \ln(M))$

ex application:

radiosité: (équilibre radiatif dans une salle)

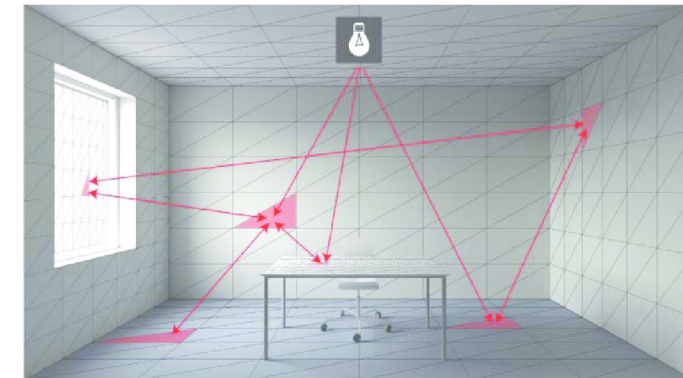
- sources E_0
- facette i voit facette j sous ~angle solide $F_{i,j}$ et renvoie avec réflectance (diffuse) ρ_i
- quelle répartition finale d'énergie E_i sur les faces ?

$$E = E_0 + \rho \cdot F \cdot E \rightarrow (I_d - \rho \cdot F) \cdot E = E_0 \rightarrow E = (I_d - \rho \cdot F)^{-1} \cdot E_0$$

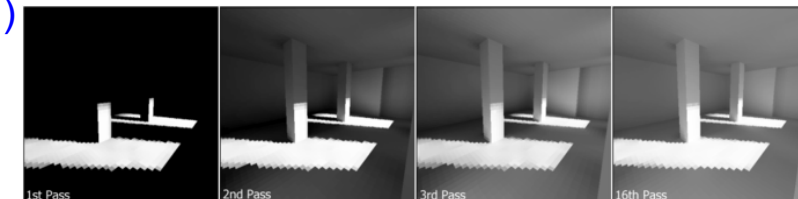
$$\sim 1/(1-x) \rightarrow \text{Taylor: } 1 + x + x^2 \dots$$

$$\rightarrow E = E_0 + M \cdot E_0 + M^2 \cdot E_0 + \dots$$

interprétation: = rendu progressif (e.g., ray-tracing bounces)



→ NB: méthode d'inversion des matrices $I_d + M$



Apartée: Cas des matrices rectangles

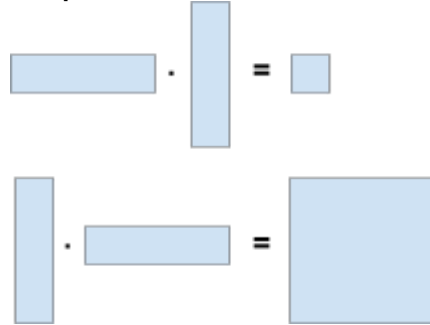
rang = taille min. système sous-contraint (trop d'inconnues) ou surcontraint (trop d'équations).

+, -, k* : ok entre identiques

mat = opérateur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

* : contrainte compatibilité in/out, comme $f \circ g$ (mat = vec de vec, A.B = matrice de PS $\Rightarrow$ faut vec de même longueur).

en particulier, on peut en tirer des matrices carrées (ouf !): $\rightarrow$ généralisation inverse, vp par [pseudo-inverse](#), [SVD](#)



$\rightarrow$ exemple: Analyse en Composantes Principales (/ PCA)

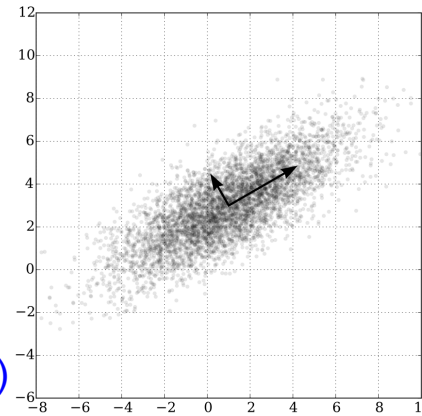
P = table des coordonnées de points

$P' = P - G$, version centrée $G = \frac{1}{n} \sum P_i$

$\rightarrow \frac{1}{n} P'^t \cdot P' = \text{covariant matrix}$ (colonne de scalaires (centrés) : variance $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 = \frac{1}{n} X^t \cdot X$)

$$P'_{i,j} = \frac{1}{n} X_i^t \cdot X_j = \frac{1}{n} \sum_k x_{i,k} x_{k,j} = \begin{pmatrix} \sum x_k^2, & \sum x_k y_k, & \dots \end{pmatrix} \\ \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum x_k y_k, & \sum y_k^2, & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots, & \dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ matrice carrée symétrique def pos $\rightarrow$ forme quadratique d'ellipsoïde. axes principaux = Vp (associé à énergie = $\sigma = \sqrt{vp}$)



$\rightarrow$ régression linéaire: hyperplan $a x_i + b y_i + \dots + c \sim 0 \rightarrow \sum ||P_i \cdot V||^2 \min \rightarrow \frac{\partial}{\partial V} = 0 = \sum (P_i \cdot V) \cdot P_i = (P^t \cdot P) \cdot V$: idem

Dérivées dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (attention, partie aride)

- Fonctions scalaires de 1 paramètre: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (= classique lycée)

$$f(t) \rightarrow f'(t)$$

$$f(g(t)) \rightarrow g'(t) \cdot f'(g(t)) \quad \text{ex: } \frac{d}{dt} (f^n(t)) = n \cdot f'(t) \cdot f^{n-1}(t), \quad \frac{d}{dt} (\ln(f(t))) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\text{Taylor: } f(t) = f(t_0) + f'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \dots$$

$$t = 0: f(x) \sim f(0) + \text{tangente} * x + \sim \text{courbure} * x^2 + \dots$$

→ utile pour fit par polynômes, décomposition en base de polynômes, ...

$$\text{ex: } \exp(x) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots \rightarrow \text{on vérifie } \exp' = \exp \dots \text{ et c'est le seul DL qui le permet}$$

→ utile pour approx, dériver, intégrer, résoudre des équadiff

appartée équadiffs:

- quelles fonc $f = f'$? (= f'' , etc)

$$\frac{f'}{f} = 1 = \frac{d}{dx} \ln(f(x)) \rightarrow \ln(f(x)) = x + c \rightarrow f(x) = \exp(x + c) = C \cdot e^x$$

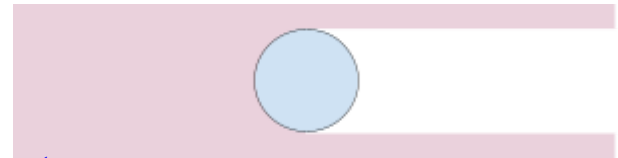
- opacité cumulée (non lin):

$$\frac{dI}{dx} = -a \cdot I : \text{proportionnel à section efficace (} \sim \text{occludeur)}$$

$$\rightarrow \frac{dI}{I} = -a \cdot dx = d \ln(I) \rightarrow \ln(I) = -ax + c \rightarrow I = I_0 \cdot e^{-a \cdot x} = \text{loi Beer-Lambert}$$

multiplicatif → $\exp$: très fréquent en physique (demie-vie, profondeur optique, etc : $e^{-\frac{V}{V_0}}$.)

NB: $\exp(\text{adimensionnel})$. Physique → unités ⇒ expr sont $\ln(\text{unité}^k)$: pas $m + m^2$ → équations aux dimensions = "preuve par 9"
fonc non linéaire ⇒ param adimensionnel (sinon Taylor ⇒ polynôme, chg unité, ...)



Dérivées dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, suite

[#6: (1h30)]

- **Fonctions vectorielles:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ex: trajectoire paramétrique $P(t)$)

$$\begin{aligned} F(t) &= (f_x(t), f_y(t)) \\ \rightarrow F'(t) &= \frac{dF}{dt} = \left(\frac{d}{dt} f_x, \frac{d}{dt} f_y \right) = (f'_x(t), f'_y(t)) : \text{vecteur tangente} \\ F(g(t))' &= g' \cdot F'(g(t)) : \text{pareil qu'avec scalaires ! 😊} \end{aligned}$$

- **Fonctions scalaires de plusieurs variables:** $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ex: heightfield $z = h(x, y)$)

$$f(x, y) \rightarrow \frac{df}{dX} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \partial : \text{dérivées partielles}$$

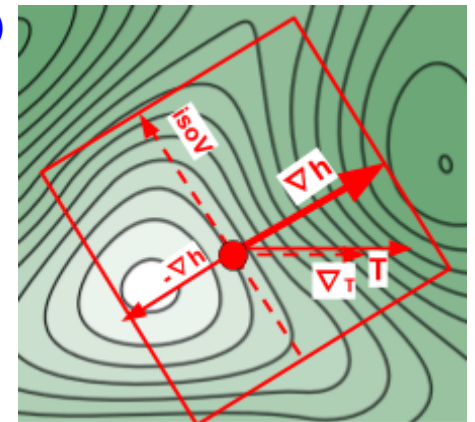
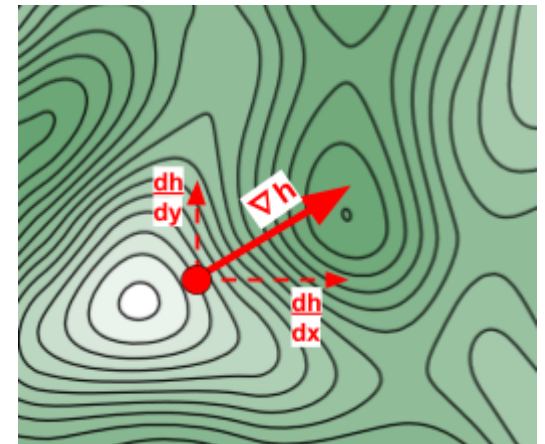
$$= \text{opérateur } \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) (f) = \frac{d}{dX} = \vec{\nabla}(f) \quad \text{nabla}(f) = \text{gradient} \quad (\text{NB: ortho aux isovaleurs})$$

$$(\rightarrow \text{normale à un champs de hauteur } z = h(x, y) : \vec{T}_x \wedge \vec{T}_y = (1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}) \wedge (0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}) = (-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1)$$

à normaliser $\rightarrow$ bc préfèrent plan tangent, mais risqué si pentes grandes)

$$\text{Différentielle/dérivée totale: } df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \vec{\nabla}(f) \cdot dX$$

$$\rightarrow \text{Dérivée directionnelle: } T = \text{dir}(t_x, t_y) \rightarrow \vec{\nabla}_T(f) = \vec{\nabla}(f) \cdot T \quad (\text{car plan tangent})$$



rappel: *Différentielle/dérivée totale:* $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \vec{\nabla}(f) \cdot dX$

→ méca fluides:

formalisme Eulerien : grilles $\rho(x, y, t)$, $v(x, y, t)$: référentiel espace
 vs formalisme Lagrangien : particules $\rho(P(t), t)$, $v(P(t), t)$: référentiel objet (en mvt)

$$\rightarrow \text{dérivée particulière } \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial X}$$

$$\text{Newton } \frac{1}{\rho} \sum F = a \rightarrow \text{Navier-Stokes: } = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \vec{\nabla}(v) \leftarrow \text{arnaque: matrice ;-)} \rightarrow \text{opérateur } (v \cdot \vec{\nabla})(v)$$

généralisation: dériver composition $f(x(t), y(t)) = f(X(t))$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} f(X(t)) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dX}{dt} \cdot \vec{\nabla}(f(X))$$

$$x' \cdot \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y} = (x', y') \cdot \vec{\nabla}(f) = X' \cdot \vec{\nabla}(f(X)) \quad (\text{ pareil } g' \cdot F'(g(t)) ! \text{ 😊 })$$

Dérivée seconde:

dériver $1 \times \rightarrow$ vecteur.

Si on voulait continuer avec dérivées supérieures $\rightarrow$ matrice:

$$f'': \left(\frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dxy} \right) = \text{Hessienne } H$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dyx}, \frac{d^2 f}{dy^2} \right) \quad dF = \frac{dF}{dX} \cdot dX \rightarrow d^2 F = \frac{d}{dX} \left(\frac{dF}{dX} \cdot dX \right) \cdot dX = dX^t \cdot \left(\frac{d^2 F}{dX^2} \right) \cdot dX : \text{forme bilinéaire}$$

f''' : tenseur d'ordre 3. ($\rightarrow$ "matrice de vecteurs"...)

$$\text{risqué, pénible} > 3. \rightarrow \text{notation d'Einstein: } A \cdot B = a_i b_i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{,i} \rightarrow \frac{dF}{dX} \cdot dX = f_{,i} dX_i, \quad dX^t \cdot H \cdot dX = H_{ij} dX_i dX_j, \dots$$

$\rightarrow$ généralise facilement en nD

$$\rightarrow \text{Taylor: } f(X) = f(X_0) + \vec{\nabla}(f)(X_0) \cdot (X - X_0) + \frac{1}{2} (X - X_0)^t \cdot H \cdot (X - X_0) + \dots$$

$$\rightarrow \text{def " } \vec{\nabla}(f)(X_0) = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0)}{X - X_0} \text{ " (conditions)}$$

Autre dérivée seconde (scalaire): Laplacien: $\Delta(f) = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} = \nabla^2(f)$

interprétations:

$$\text{courbure moyenne} = \frac{C_{max} + C_{min}}{2}$$

→ fonction *harmonique* si $\Delta f = 0 \Rightarrow$ surface minimale

eqn chaleur: $\frac{d}{dt}f = c \Delta(f)$ (J.Fourier) et diffusion en général

$$\text{équilibre: } \frac{d}{dt}f = 0 \Rightarrow \Delta f = 0$$

+ conditions aux bords (valeur = Dirichlet, gradient = Neumann)

→ opérateur de lissage: (ex: [diffusion curves](#)):

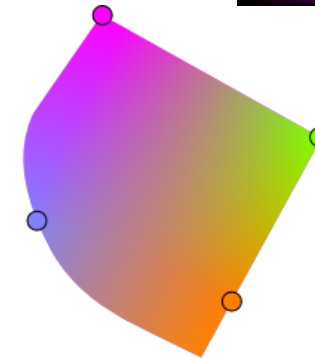
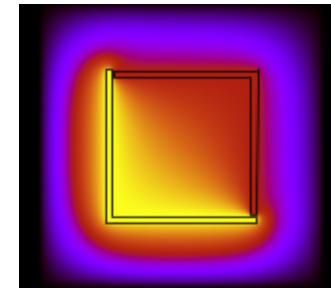
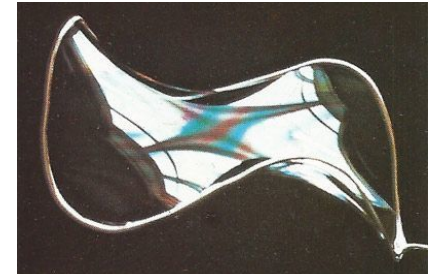
$$Image(t + 1) = Image(t) - c. \Delta(Image)$$

si on faisait $+\Delta$, on renforcerait les contrastes, au contraire

Laplacien Discret (Différences Finies) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ autre interprétation: $\sim f_{moy} - f$: trouve les grumeaux de gradient



- Fonctions vectorielles de plusieurs variables: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (ex: vitesse de fluide $V(x, y)$, mapping $uv(x, y)$)

[J4 - #7: (1h)]

→ dérivée = matrice = $\vec{\nabla}(F) = (\vec{\nabla}f_x, \vec{\nabla}f_y)$

$F(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}, \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \text{matrice jacobienne. si } F = A.X \text{ (changement repère)} \rightarrow J_F = A$

$\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial y} \right)$

si $F = X^t.A.X + B.X + C \rightarrow J_F = 2.A.X + B$: pareil au cas scalaire ! 😊

($\sim a.x^2 + b.x + c \rightarrow 2a.x + b$ mais attention à l'ordre des multiplications)

approx lin (Taylor1): $F(X) \sim F(X_0) + J_F(X_0) \cdot (X - X_0)$

NB: si on voulait continuer avec dérivées supérieurs: J' = tenseur d'ordre 3

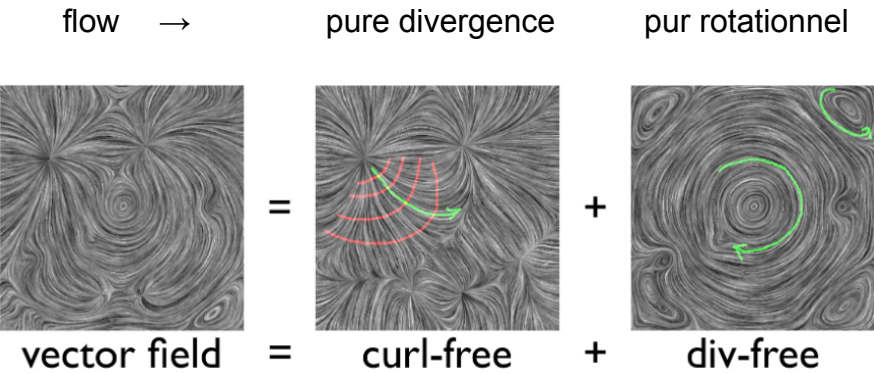
Autre opérateurs dérivée: (très utilisés en physique):

rappel: opérateur $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ (pseudo-vecteur)

divergence : $\vec{\nabla} \cdot F = \frac{d}{dx}f_x + \frac{d}{dy}f_y$

rotationnel (curl) : $\vec{\nabla} \wedge F = \frac{d}{dx}f_y - \frac{d}{dy}f_x$ (2D)

propriétés: $div(rot) = 0$, $rot(grad) = 0$, $div(grad) = \Delta$
"rot incompressible, grad irrotationnel"



décomposition de Hodge/Helmholtz: tout champs de vecteur $V(x, y) = grad + rot (+ harmonique)$

harmonique: $\vec{\nabla}(H)$ div-free + curl-free → pour unicité

$v = \nabla\varphi + \nabla\times\Psi + h$

$$1D: \int_{x=0}^{10} \sin(10x) dx \rightarrow \text{changement de variable } y = 10x \rightarrow dx = \frac{dy}{10} \rightarrow \int_{y=0}^{100} \frac{1}{10} \sin(y) dy$$

2D: ex: intégrer surface d'un disque:

$$\int_{x=-r}^r \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dx dy$$

bornes + simples en polaire !

changement de variable: $x = \rho \cdot \cos(\theta)$, $y = \rho \cdot \sin(\theta) \rightarrow \rho = \|(x, y)\|$, $\theta = \text{atan}(y, x)$

→ approche lycée: déterminant Jacobien $dx dy \rightarrow \det(J_{X \rightarrow P}) d\theta d\rho$

$$\begin{aligned} J_{X \rightarrow P} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\rho \cdot \sin(\theta) \\ \sin & \rho \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \rightarrow \det(J) = \rho \rightarrow \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \rho d\theta d\rho = \pi r^2 \\ &= \det(J_{P \rightarrow X}^{-1}) = 1/\det(J_{P \rightarrow X}), \quad J_{P \rightarrow X} = \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{dx} & \frac{d\rho}{dy} \\ \frac{d\theta}{dx} & \frac{d\theta}{dy} \end{pmatrix} \quad (\text{parfois + simple dans l'autre sens}). \end{aligned}$$

$$\text{NB: } \left| \frac{dxy}{d\rho d\theta} \right| \cdot d\rho d\theta$$

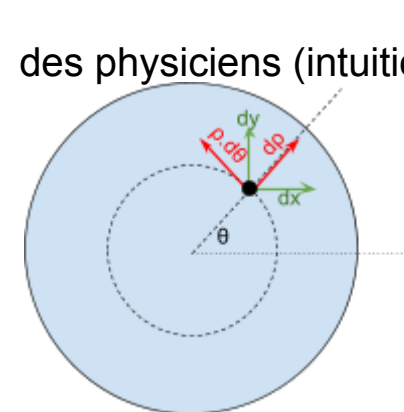
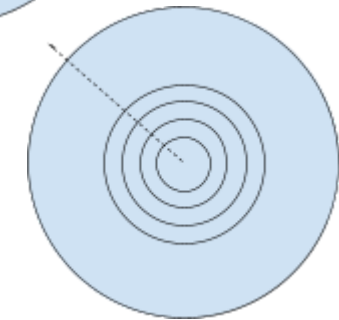
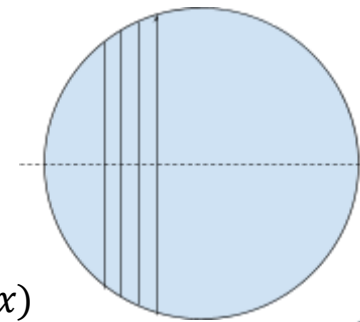
$$\frac{dX}{dP} \cdot dP \quad \text{pareil au cas scalaire ! 😊}$$

→ interprétation algèbre extérieur ~ "produit vectoriel"(2D) $dx \wedge dy$: cf $\vec{dS} = \vec{dx} \wedge \vec{dy}$ des physiciens (intuition sur disto ou big)

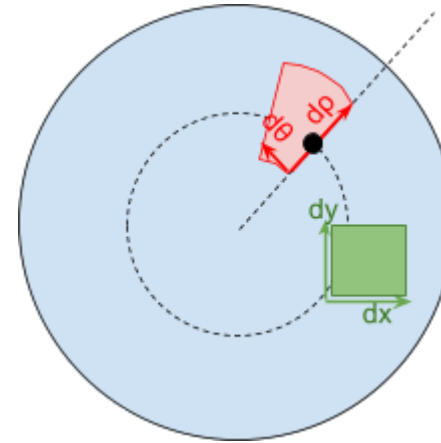
$$\rightarrow dx = \frac{dx}{d\rho} d\rho + \frac{dx}{d\theta} d\theta = \cos(\theta) d\rho - \rho \cdot \sin(\theta) d\theta$$

$$dy = \frac{dy}{d\rho} d\rho + \frac{dy}{d\theta} d\theta = \sin(\theta) d\rho + \rho \cdot \cos(\theta) d\theta$$

$$dx \wedge dy = \rho (c^2 + s^2) d\rho \wedge d\theta = \rho d\rho \wedge d\theta$$



Intuition éléments de surface: $\vec{dS}_{xy} = \vec{dx} \wedge \vec{dy}$, $\vec{dS}_{\rho\theta} = \vec{d\rho} \wedge \vec{d\theta}$
 det Jacobien = surface élémentaire
 (rouge: proportionnel à ρ)



Ex: Intégrer surface d'un triangle, ou d'un parallélogramme tourné:

- en x,y, cauchemar.
- param suivant les bords, voire, coord texture normalisée u,v: facile !

→ Exercice:

$$U = (2, 1) \quad V = (1, 2)$$

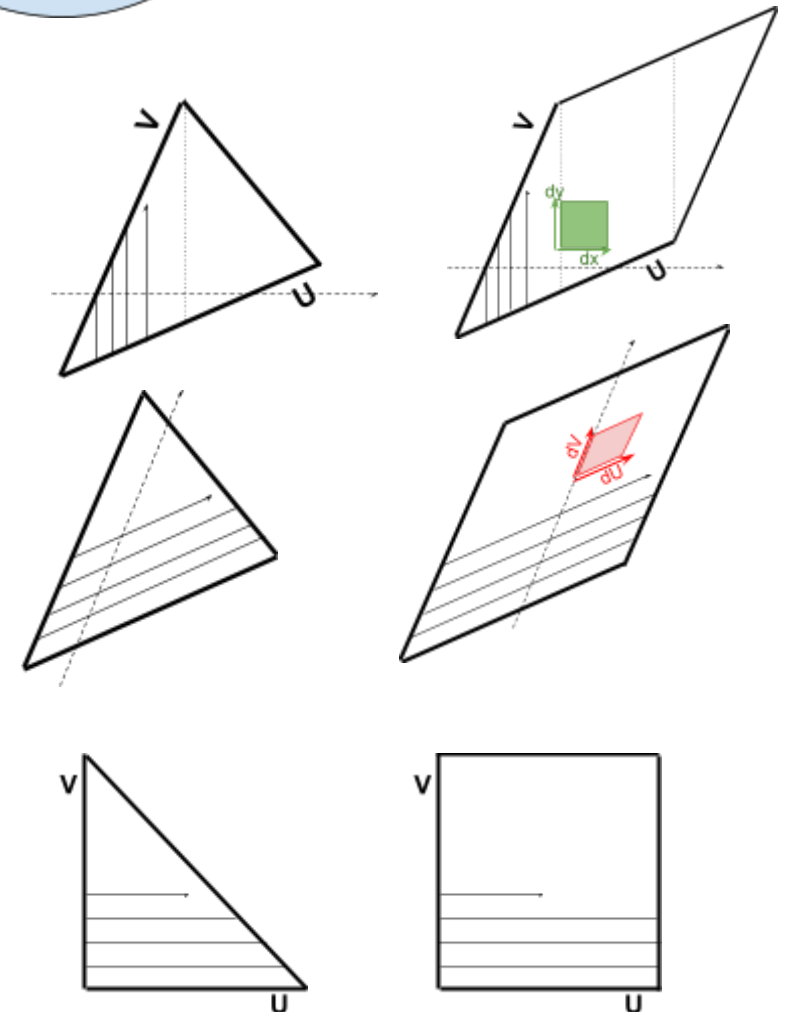
$$(x, y) = (U; V) \cdot (u, v)$$

$$\rightarrow J = \frac{dxy}{d uv} = (U, V) \rightarrow \int_{(x,y) \in T} dx dy = \int_{(x,y) \in T} \left| \frac{dX}{dU} \right| du dv = 3. \int_{T_{uv}} du dv = \frac{3}{2}$$

$$J \text{ via alg\`ebre ext\`erieur: } dx = 2du + dv, dy = du + 2dv$$

$$\rightarrow dx \wedge dy = 0 + 4 du \wedge dv + dv \wedge du + 0 = 3 du \wedge dv$$

Intuition éléments de surface $\vec{dS}_{xy}$, $\vec{dS}_{uv} = \vec{du} \wedge \vec{dv}$



Exercice récréation : (fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour géométrie) / **transition** intro aux bases de fonctions

- Trouver quadrique $C(t) = At^2 + Bt + C$ à partir de $P_0, P_1, P_c \mid C(0) = P_0, C(1) = P_1, tg(0) \sim P_0P_c, tg(1) \sim P_cP_1$

$C = P_0, B = 2(P_c - P_0), A = P_1 + P_0 - 2P_c$ [DesmosGraph 2D](#)

interprétation: $(1 - t)^2 \cdot P_0 + t^2 \cdot P_1 + 2t(1 - t) \cdot P_c$ $\partial: 2(1 - t) \cdot P_0P_c + 2t \cdot P_cP_1$ [DesmosGraph 2D](#)

NB: - valide qqsoit $\mathbb{R}^n$ 😊
- paramétrique: reste vrai dans chaque dimension (ou sous-ensemble).

- Trouver cubique (=spline) $C(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ à partir de $P_0, P_1, T_0, T_1 \mid C(0) = P_0, C(1) = P_1, tg(0) \sim T_0, tg(1) \sim T_1$

$D = P_0, C = T_0, A = T_0 + T_1 - 2(P_1 - P_0), B = 3(P_1 - P_0) - 2T_0 - T_1$ [DesmosGraph 3D](#)

interprétation: $(2t^3 - 3t^2 + 1) \cdot P_0 - (2t^3 - 3t^2) \cdot P_1 + t(1 - t)^2 \cdot T_0 - t^2(1 - t) \cdot T_1$ $\partial: 6t(1 - t)P_0P_1 + (1 - 4t + 3t^2) \cdot T_0 - (2t - 3t^2) \cdot T_1$ [DesmosGraph 2D](#)

Spline P_0, P_1, T_0, T_1 , $C(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, suite :

interprétation: $(2t^3 - 3t^2 + 1).P_0 - (2t^3 - 3t^2).P_1 + t(1-t)^2.T_0 - t^2(1-t).T_1$

$-(2t^3 - 3t^2)[1-t]$: symétrie par permutation sens de parcours (ou de numérotation)

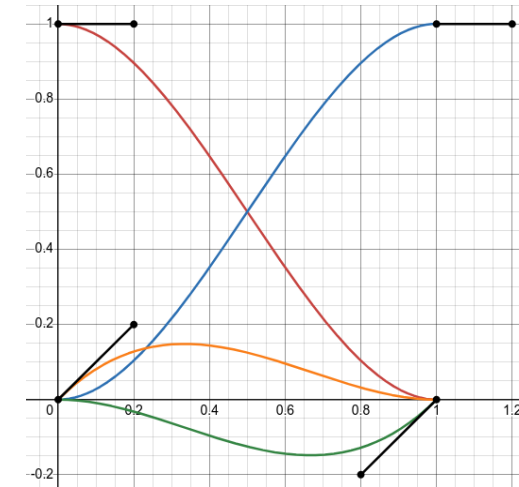
$d : 6t(1-t)P_0P_1 + (1-4t+3t^2).T_0 - (2t-3t^2).T_1$

$-(2t-3t^2)[1-t]$

[DesmosGraph 2D](#)

$$\rightarrow s(t).P_0 + s(1-t).P_1 + d(t).T_0 - d(1-t).T_1$$

[DesmosGraph](#)



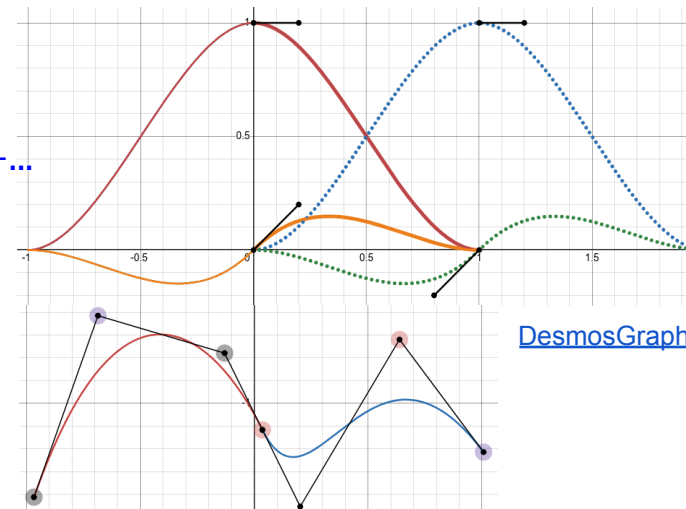
chaînage N points:

$$S(t) = s(|t|), D(t) = \text{sgn}(t).d(|t|)$$

$$\rightarrow S(t).P_0 + D(t).T_0 + S(t-1).P_1 + D(t-1).T_1 + \dots$$

$$S_i(t) = s(|t-i|), D_i(t) = \text{sgn}(t-i).d(|t-i|)$$

$$\rightarrow S_0(t).P_0 + D_0(t).T_0 + S_1(t).P_1 + D_1(t).T_1 + \dots$$



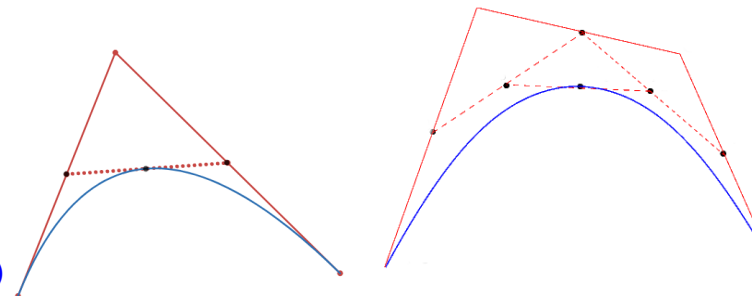
[DesmosGraph](#)

remarques:

- on peut approcher n'importe quelle fonc continue
- on l'a représentée par du discret ! $\{P_i, T_i\}$

Apartée: constructions géométriques des splines

(midpoint $\rightarrow$ récursif, mais marche pour toute proportion α)



Bases de fonctions (polynômes, splines, éléments finis, Fourier, ...)

[#9, 23 mai (1h)]

généralisation des vecteurs / matrices / bases géométriques

- base discrète finie: monômes $1, x, x^2, \dots, x^N \rightarrow$ espace des polynômes degré $\leq N \rightarrow$ coords = coefs = vec
- base discrète infinie: tous monômes $\rightarrow$ toutes les fonctions via leur dev de Taylor. $\rightarrow$ coords = coefs = vec infini
- base discrète finie: DFT: $e^{-\frac{2ik\pi}{N}}$ $\rightarrow$ toutes les fonctions périodiques jusqu'à fréquence N $\rightarrow$ coords = $\mathbb{C}$ ou A , ϕ = vec
- base continue: Fourier: $e^{-i\omega t}$ (coefficients complexes) $\rightarrow$ coords = $\mathbb{C}$ ou A , ϕ = "vec continu" = fonc = spectre(f)

$\rightarrow$ approximation de fonctions en projetant dans une base donnée $\rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_i f_i b_i(x)$ ou $\int f(i) b_i(x) di$

- produit scalaire $f \cdot g = \int f g \rightarrow$ orthogonal si 0, $\|f\| = \sqrt{\int f^2}$
 - $x \perp x^2$ (sur $\mathbb{R}$ ou $[-A, A]$) mais pas x^2 vs x^4 . Mais on peut construire des bases de [polynômes orthogonaux](#) (Legendre, Tchebychev...)
 - base Fourier orthogonale: $\int e^{-i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} dt = e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} = \delta_{\omega_1 = \omega_2}$ (intuition avec $\sin(kx)$ sur $[0, 2\pi]$)

$\rightarrow$ si base ortho: on trouve coordonnées par PS sur les "axes" de la base : $f_i = \int f(x) b_i(x)$

$\rightarrow$ ex: décomposition Fourier = coordonnées de f() dans espace Fourier = $\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt$

$\rightarrow$ si base pas ortho:

trouver $f_i \rightarrow$ on veut inverser $f(x) = \sum_i f_i b_i(x)$ (idem avec $\int f(i) b_i(x) di$)

$\rightarrow \int f(x) b_j(x) = f'_j = \int (\sum_i f_i b_i(x)) b_j(x) = \sum_i f_i (\int b_i(x) b_j(x) dx) \rightarrow (f'_i) = (B_{ij}) \cdot (f_i) \sim \text{M.vec} \rightarrow (f_i) = B^{-1} \cdot (f'_i)$
si ortho, base diagonale (NB: sinon, $M^t M$ sym)

$\rightarrow$ on retrouve tous nos outils de l'algèbre linéaire !

$\rightarrow$ on peut représenter du continu avec une base discrète ! (contrainte cachée: Kern / $freq_{max}$: complexité/expressivité objectivement discrète)

Exemples:

- **splines:** (cf construction quadriques / cubiques page précédente)

$$S_0(t).P_0 + D_0(t).T_0 + S_1(t).P_1 + D_1(t).T_1 + \dots \quad \text{avec} \quad S_i(t) = s(|t - i|) , D_i(t) = \text{sgn}(t - i).d(|t - i|)$$

→ base de fonctions $\{S_i(), D_i()\}$ courbes représentées par coordonnées $\{P_i, T_i\}$ = “points” dans cet espace

→ en 1D: $f(x) = (s_0(x), d_0(x), s_1(x), d_1(x), \dots) \cdot (f_0, f'_0, f_1, f'_1) = M \cdot V$, M : “matrice” discret $\times$ continu

NB: représentation dénombrable de fonctions continues ;-)

$$s_i \perp d_i, \text{ mais } s_i \cdot s_j = 0 \text{ ssi } |i - j| > 1 \quad (\text{idem pour } d_i \cdot d_j)$$

$$\text{rappel: } f \cdot g = \int f(t)g(t)dt$$

→ Représenter une fonction f par une spline:

- spline d'*interpolation* : coefs = sampler la courbe + ses pentes
- spline d'*approximation*: solve système (cf page précédente) :

$$f'_j = \int f(x)b_j(x) , (f'_i) = B^{-1} \cdot (f'_i) \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \int b_i(x)b_j(x) \quad (\text{NB: } M^t M \text{ sym})$$

- **Fourier discret (DFT) :**

$$b_k = e^{-\frac{2ik\pi}{N}} = b_1^k \quad b_i \perp b_j \text{ si } i \neq j$$

$$\rightarrow \text{coefs obtenus par PS: def Fourier} = \sum_k f_k e^{-\frac{2ik\pi}{N}} = F \cdot (f_k) , F = (b_1^0, b_1^1, \dots, b_1^{N-1})$$

matrice de Vandermonde symétrique

- **Fourier continu :**

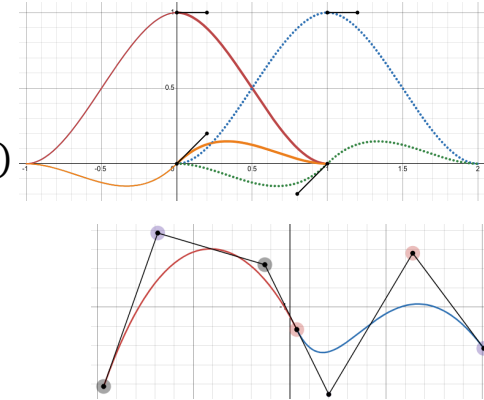
$$b(\omega) = e^{-i\omega t} \quad b(\omega_i) \perp b(\omega_j) \text{ si } i \neq j$$

→ pareil, sauf que ce ne sont plus des matrices (→ opérateur linéaire continue : ça marche pareil 😊)

NB: dérivées: on peut appliquer à la base ! $f'(x) = (\sum f_i b_i(x))' = \sum f_i b_i'(x)$

$$\rightarrow \text{propriété: } f(t) = \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow f'(t) = \int i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow \text{les équadiffs sont transformées en polynôme en Fourier ! } f'' + f = g \rightarrow -\omega^2 \hat{f} + \hat{f} = \hat{g} \rightarrow \hat{f} = \frac{\hat{g}}{1-\omega^2}$$



- **Éléments Finis** : https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_%C3%A9l%C3%A9ments_finis

[#10 (+1h), + (1h)]

résoudre des équadiff numériquement (donc en discret fini) ex: $f'' + f = g$

- *Différences Finies*: $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ou + complexe) $\rightarrow$ erreur en $O(h^k)$: dur à maîtriser.
- *Éléments Finis*: exact ! (si f et g dans l'espace de fonctions)

$$f(x) = \sum f_i b_i(x)$$

idée naïve:

$$\rightarrow \sum_i f_i \cdot b_i(x)'' + f_i \cdot b_i(x) = \sum_i g_i \cdot b_i(x) \rightarrow (b_i'' + b_i) \cdot (f_i) = (b_i) \cdot (g_i) \rightarrow f_i = \dots$$

si base infiniment dérivable avec bonnes propriétés, nickel. Mais splines pas ok, par ex : $s''(x) = 6 - 12x \dots$

$\rightarrow$ *formulation faible / variationnelle*: $\int (f'' + f) \cdot s = \int g \cdot s \quad \forall s$ dans l'espace de fonctions

$$\text{puis integ par partie: } \int_{\Omega} f' g = [f g] - \int_{\Omega} f g' \rightarrow \int_{\Omega} f'' \cdot s = \int_{\partial\Omega} f' \cdot s - \int_{\Omega} f' \cdot s' \quad \text{et si } s \rightarrow 0 \text{ à l'infini, } \int_{\partial\Omega} = 0$$

$$\rightarrow \int (-f' \cdot b_j' + f \cdot b_j) = \sum_i (-f_i \cdot \int b_i' b_j' + f_i \cdot \int b_i b_j) = \sum_i g_i \int b_i b_j$$

$$\rightarrow (-\int b_i' b_j' + \int b_i b_j) \cdot (f_i) = (\int b_i b_j) \cdot (g_i) : M \cdot (f_i) = B \cdot (g_i) \rightarrow f_i = \dots \quad (\text{NB: } M^t M \text{ sym})$$

rappel: dans le cas des splines $b_i \cdot b_j = 0$ ssi $|i - j| > 1 \rightarrow$ matrice bande

Conclusion

- la géométrie par l'algèbre
- les systèmes de n équations à m inconnues
- les intégrales en nD
- les bases de fonction
- les splines, Fourier, les éléments finis, etc

C'est (quasi) tout pareil que l'algèbre du lycée avec les scalaires 😊

(Faut juste faire attention au côté des multiplications, et aux divisions.
Et plus de créativité dans les types de dérivées.
)

rappels différences finies:

Taylor: $f(x + dx) = f(x) + dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x) + \dots \rightarrow f' = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{dx}{2} f'' \rightarrow "O(1)",$ mais err dure à saisir (reste, f'')

DF centrée:

$$\frac{f(x+dx) - f(x-dx)}{2dx} = f' + \frac{dx^2}{6} f''' \rightarrow O(2)$$

Extrapolation de Richardson :

$$2dx: f' = \frac{f(x+2dx) - f(x)}{2dx} + dx f'' \rightarrow 2(1) - (3) = O(2)$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Extrapolation_de_Richardson

$$\frac{dx}{2}: f' = \frac{f(x+\frac{dx}{2}) - f(x)}{\frac{dx}{2}} + \frac{dx}{4} f'' \rightarrow 4(1) - (2) = O(1), \text{ etc.}$$

et on peut recommencer pour faire tomber autant de terme qu'on veut

Idem pour booster la convergence d'intégrale: ($\rightarrow$ méthode de Romberg)

trapèzes: $T(n) - I \sim O(h^2)$

$$\rightarrow 4T(2n) - T(n) = 3I + O(h^4)$$

théorème de Stokes / gradient / div

Fourier / EDP / propriétés, spectre, traitement du signal

[#11, 20 juin (1h)]