

Outils mathématiques 1

Examen du 14 décembre 2004

Durée : 2 heures.

Tous documents autorisés.

La clarté des réponses sera prise en compte dans la notation ; you may answer in English.

Les deux parties sont indépendantes.

1 Partie I : Interpolation et approximation (10 pts)

On a vu en cours des méthodes permettant d'interpoler ou d'approcher un ensemble de points ordonnés P_0, \dots, P_n par une courbe lisse. Celles-ci permettent notamment de lisser une courbe linéaire par morceaux (la courbe est définie comme la suite des segments $P_i P_{i+1}$).

En 3D, il existe également des méthodes permettant de lisser une surface polyédrique. On s'intéressera ici uniquement aux maillages triangulaires : une surface S est définie comme un ensemble de sommets, d'arêtes et de faces triangulaires tels que toute arête de S a pour extrémités deux sommets distincts et ne contient pas d'autre sommet, tout triangle a pour arêtes trois arêtes distinctes et son intérieur n'intersecte aucune arête ni ne contient de sommet, et deux triangles quelconques soit ne s'intersectent pas, soit s'intersectent en un sommet commun, soit s'intersectent le long d'une arête commune.

Schéma de subdivision de Loop

En 1987, Charles T. Loop a proposé dans son mémoire de Master la technique de subdivision suivante. Soit $S = S^0$ la surface initiale, aussi appelée maillage de contrôle. Chaque face de S est divisée en quatre par insertion d'un nouveau sommet sur chaque arête de S (voir figure 1).

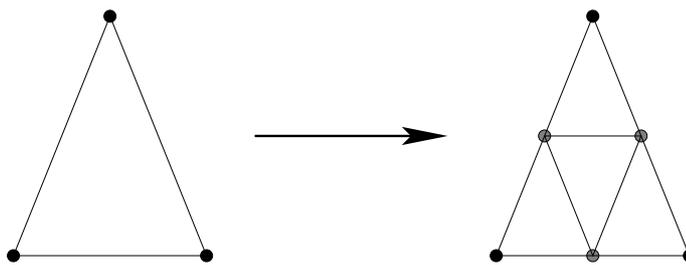


Figure 1: Subdivision d'une face selon le schéma de Loop.

La position d'un nouveau sommet $N_{i,j}^1$ inséré sur l'arête $P_i^0 P_j^0$ est définie par le masque de la figure 2 (a), c'est-à-dire qu'on a :

$$N_{i,j}^1 = \frac{3}{8}P_i^0 + \frac{3}{8}P_j^0 + \frac{1}{8}P_{v1(i,j)}^0 + \frac{1}{8}P_{v2(i,j)}^0 \quad (1)$$

($P_{v1(i,j)}^0$ et $P_{v2(i,j)}^0$ sont les voisins communs à P_i^0 et P_j^0 sur S^0).

Ensuite, **les sommets de S sont également déplacés** : le sommet P_i^0 prend la position :

$$P_i^1 = \alpha_n P_i^0 + \frac{(1 - \alpha_n)}{n} \sum_{k=1}^n P_{v(k)}^0 \quad (2)$$

(voir figure 2 (b)). n désigne le nombre de voisins, ou **valence**, du sommet P_i^0 , et $\alpha(n)$ est un nombre à calculer. Les $P_{v(k)}^0$, $1 \leq k \leq n$, sont les sommets voisins de P_i^0 .

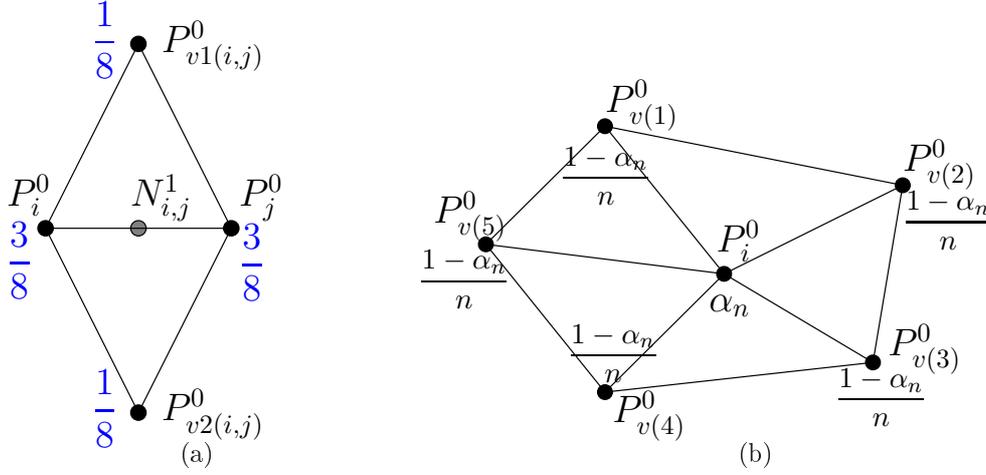


Figure 2: Masques pour le schéma de subdivision de Loop.

On définit ainsi une nouvelle surface S^1 , dont les sommets sont les $N_{i,j}^1$ et les P_i^1 et qui comprend 4 fois plus de faces que S^0 .

On peut ensuite itérer le processus : à l'étape k , on crée une surface S^k dont les sommets $N_{i,j}^k$ et P_i^k sont définis à partir des sommets P_j^{k-1} de la surface S^{k-1} .

1. Le schéma de Loop correspond-il à un schéma d'interpolation ou d'approximation ?
2. Quelles valeurs peut-on donner à α_n pour avoir convergence, c'est-à-dire pour qu'il existe une surface limite lorsque le nombre d'itérations k tend vers l'infini ?

Indication : On pourra étudier la convergence de la distance entre un sommet P_i^l de S^l et son "successeur" P_i^{l+1} sur S^{l+1} , et poser $Q_i^l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{v(k)}^l$.

Remarque : On peut prouver (mais on ne vous le demande pas ici) qu'en posant $\alpha_n = \frac{3}{8} + \frac{(3+2 \cos \frac{2\pi}{n})^2}{64}$, on converge vers une surface C^2 presque partout.

3. Quel est le principal avantage d'un schéma de subdivision comme celui de Loop pour générer une surface lisse, par rapport à un produit tensoriel de courbes splines ?
4. A votre avis, quel est l'intérêt de faire dépendre le masque de la valence des sommets ? Justifiez votre réponse.
5. Expliquer en quoi le schéma de subdivision de Loop peut être utilisé pour faire de l'analyse multi-résolution de surfaces.

2 Partie II : Position, orientation et mouvement (10 pts)

2.1 Rappels de dynamique du solide

Cette section ne comporte pas de question.

Soit un solide S , de centre de gravité G et de masse m , soumis à un ensemble de forces extérieures \vec{F} et à une rotation d'axe \vec{u} et d'angle θ (voir Figure 3).

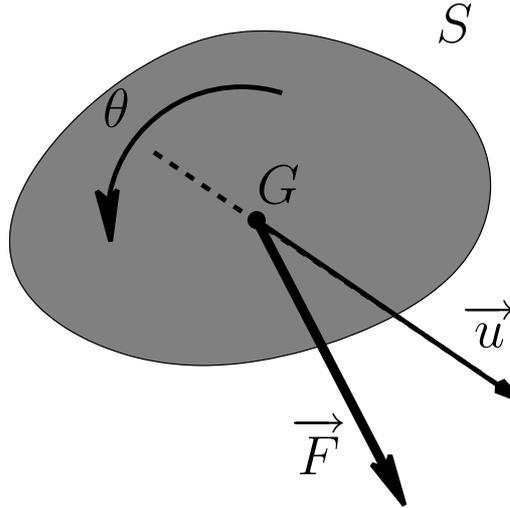


Figure 3: Solide S soumis à un ensemble de forces extérieures \vec{F} .

Le Principe Fondamental de la Dynamique donne, d'une part :

$$\sum \vec{F}(G) = m \vec{a}(G), \quad (3)$$

avec \vec{a} l'accélération du mouvement (le centre de gravité du solide se comporte comme un point matériel), et d'autre part :

$$\sum \vec{M}_F = \vec{\omega} \wedge (J_G \vec{\omega}) + J_G \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4)$$

\vec{M}_F est le moment de la force \vec{F} : $\vec{M}_F = \overrightarrow{GP} \wedge \vec{F}$, avec $P \in S$ le point d'application de F . J_G représente la matrice d'inertie du solide, et $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}$ la vitesse angulaire du solide par rapport à son axe de rotation.

2.2 Intégration du mouvement d'un solide

Le calcul de l'évolution de la position de G au cours du temps peut se faire de manière approchée grâce au schéma d'Euler : comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$, la relation 3 donne :

$$\vec{v}(t+dt) \sim \frac{1}{m} \sum \vec{F} dt + \vec{v}(t),$$

et comme de la même façon $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t)}{dt}$, on peut calculer la position $x(t+dt)$ de G à tout instant $t+dt$ à partir de sa position $x(t)$ à l'instant t .

On souhaite appliquer le schéma d'Euler au calcul de l'orientation, grâce à la relation 4 et au fait que la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t+dt)$ est la composée de la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t)$ par la

rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\vec{\omega}(t)dt$. Le problème qui se pose est celui de la *représentation des rotations* pour effectuer ces calculs.

1. Représentation par matrices de rotation

Que pensez-vous de l'idée de représenter les rotations et les vitesses angulaires par des matrices ?

2. Représentation par vecteurs rotation

On décide de représenter la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t)$ par un vecteur rotation $\vec{r}(t)$. De la même façon, on représente la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ grâce au vecteur rotation $\vec{dr}(t) = \vec{\omega}(t)dt$.

- Quelles seront les caractéristiques (norme, direction) de $\vec{r}(t)$?
- On se place dans le cas des petites rotations : $\sin\theta \sim \theta$, $\cos\theta \sim 1$. Montrer que le vecteur correspondant à la composée de la rotation d'axe \vec{u}_1 et d'angle θ_1 par la rotation d'axe \vec{u}_2 et d'angle θ_2 vaut approximativement $\theta_1\vec{u}_1 + \theta_2\vec{u}_2$.
- Qu'en déduisez-vous pour le calcul de la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t+dt)$? Quels sont les avantages et les inconvénients pour notre problème de cette représentation ?

3. Représentation par quaternions

On décide maintenant de représenter la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t)$ par un quaternion unitaire q_t .

- Montrer que le quaternion unitaire q_{t+dt} représentant la rotation d'axe \vec{u} et d'angle $\theta(t+dt)$ peut s'écrire comme le produit de deux quaternions unitaires qu'on donnera.
- Que pensez-vous de cette représentation, par rapport aux précédentes ?

4. Composition des rotations

On note $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère du monde et $\mathcal{R}_1 = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère associé au solide S . Soit P_0 un objet ponctuel tournant autour de S selon une rotation d'axe \vec{x} et d'angle α (voir figure 4). Quel est le mouvement de P_0 dans \mathcal{R}_0 ? On justifiera soigneusement les calculs.

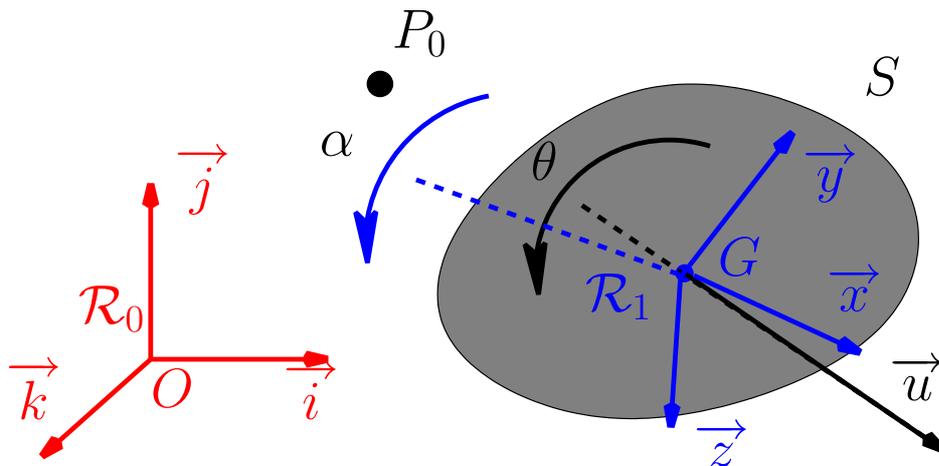


Figure 4: Solide S , objet ponctuel P_0 en rotation autour de S et repères associés.