Outils mathématiques 1

Examen du 15 décembre 2005

Durée : 2 heures.
Tous documents autorisés.
La clarté des réponses sera prise en compte dans la notation.
Les deux parties sont indépendantes.

1 Partie I : Interpolation et approximation (10 pts)

1.1 Spline de Kochanek-Bartels

Une *spline de Kochanek-Bartels* est une concaténation de splines d'Hermite de premier ordre (on dit aussi splines d'Hermite cubiques) pour lesquelles les tangentes aux points de contrôle sont contrôlées par trois paramètres t, b et c variant entre -1 et 1.
Soient $P_0, \ldots, P_n$ $n+1$ points de contrôle, et, $\forall 0 \leq i \leq n-1, C_i$ une spline d'Hermite de premier ordre entre P_i et P_{i+1}. On note D_i et $-S_{i+1}$ les tangentes à C_i en ses deux extrémités (cf. figure 1).

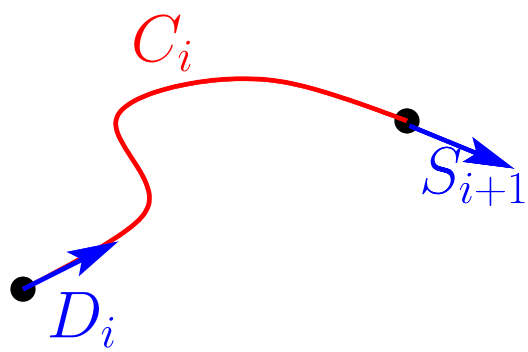

Figure 1: Notation.

La spline de Kochanek-Bartels de paramètres (t, b, c) pour les points $P_0, \ldots, P_n$ est définie comme l'union des splines $C_i, 0 \leq i \leq n-1$, pour lesquelles $\forall i \in [1, n-1]$

$$S_i = \frac{(1-t)(1+b)(1-c)}{2}(P_i - P_{i-1}) + \frac{(1-t)(1-b)(1+c)}{2}(P_{i+1} - P_i) \tag{1}$$

$$D_i = \frac{(1-t)(1+b)(1+c)}{2}(P_i - P_{i-1}) + \frac{(1-t)(1-b)(1-c)}{2}(P_{i+1} - P_i) \tag{2}$$

1.2 Questions

1. Une spline de Kochanek-Bartels est-elle une spline d'interpolation ou d'approximation ?
2. A quelle spline connue correspond la spline de Kochanek-Bartels pour laquelle $(t, b, c) = (0, 0, 0)$?
3. Pour chacun des trois paramètres t, b et c :
   (a) expliquez son influence sur un raccordement entre deux courbes d'Hermite C_{i-1} et C_i ;
   (b) illustrez cette influence avec des schémas pour différentes valeurs du paramètre ;
   (c) expliquez à quelle grandeur "physique" correspond le paramètre.

   Indication : on pourra étudier les splines de Kochanek-Bartels pour lesquelles
   $(t, b, c) = (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$.
4. Quelles autres splines connaissez-vous permettant de contrôler (à peu près) les mêmes grandeurs ?
5. Parmi les propriétés intéressantes des splines étudiées au premier cours, quelles sont celles vérifiées par les splines de Kochanek-Bartels ?

2 Partie II : Position, orientation et mouvement (10 pts)

2.1 Contrôle de l'attitude d'un avion

L'orientation dans $\mathbb{R}^3$ d'un avion (ou plus généralement d'un objet volant) par rapport à un repère de référence $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ est appelée communément *attitude*, et est définie par trois rotations successives (cf. figure 2 (a)) :

1. une rotation de *lacet* (*yaw* en anglais) autour de l'axe $\vec{k}_0$;
2. une rotation de *tangage* (*pitch* en anglais) autour de l'axe déduit de $\vec{\jmath}_0$ par la rotation précédente ;
3. une rotation de *roulis* (*roll* en anglais) autour de l'axe déduit de $\vec{\imath}_0$ par le produit des rotations précédentes.

(a) (b)

Figure 2: (a) Attitude d'un avion (image issue de Wikipedia). (b) Avion de manège.

2.2 Questions

1. **Représentation par angles d'Euler.** Afin de représenter l'attitude d'un avion, la solution la plus naturelle consiste à utiliser les angles d'Euler (ou angles de Cardan). Expliquez comment.
2. Cette représentation engendre néanmoins un problème, appelé *verrouillage du cardan* (*gimbal lock*), et qui consiste en la perte d'un degré de liberté.
   Expliquez comment et donnez un exemple de situation pouvant conduire à un verrouillage de cardan.
3. **Représentation par matrices rotations.** Afin d'éviter ce genre de désagrément, il est recommandé de représenter l'attitude d'une autre façon. Expliquez comment représenter l'attitude par une matrice. Que pensez-vous de cette solution ?
4. **Représentation par quaternions.** On décide de représenter l'attitude par un quaternion ; on pose respectivement ϕ, θ et ψ les angles de lacet, tangage et roulis.
   Donnez l'expression du quaternion d'attitude en fonction de ϕ, ψ et θ, en détaillant vos calculs.
5. Que pensez-vous de cette solution, comparée aux deux précédentes ?
6. **Calcul du mouvement d'un avion de manège.** *Cette question est indépendante des précédentes.* Finalement, contrôler l'attitude d'un avion semblant complexe, nous choisissons de nous restreindre au cas d'un avion de manège (cf. figure 2 (b)). Cet avion, représenté par un solide S dont le repère est noté $\mathcal{R}_2$, monte et descend dans le manège avec une vitesse sinusoïdale : $v_{2,1} = \sin\alpha$. Le manège, dont le repère est noté $\mathcal{R}_1$, tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical $\overrightarrow{k}_0$ du repère du monde $\mathcal{R}_0$.
   Calculez le mouvement de l'avion dans le repère du monde.