Outils mathématiques 1

Examen du 12 décembre 2006

Durée : 2 heures.
Tous documents autorisés, sauf les ordinateurs portables.
La clarté des réponses sera prise en compte dans la notation.
Les deux parties sont indépendantes.

1 Partie I : Interpolation et approximation (10 pts)

1.1 Raffinement hiérarchique de B-splines

Nous nous intéressons au problème du *raffinement* d'une surface spline, c'est-à-dire l'ajout de points de contrôle.

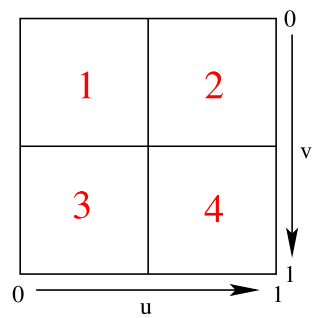

Figure 1: Raffinement d'un morceau de surface spline.

1.2 Questions

1. Rappeler la définition d'une surface B-spline (bi)cubique uniforme.

2. Soit $S(u,v)$ une surface B-spline bicubique uniforme. On note $p_{i,j}$ ses $(n+1)\times(m+1)$ points de contrôle et $F_i(u)$ ou $F_j(v)$ ses $n+m+2$ fonctions d'influence. Expliquer pourquoi $S(u,v)$ peut être définie par morceaux, chacun de ses morceaux s'écrivant de manière matricielle sous la forme :
$$S_{k,l}(u,v) = U\ F_u\ P_{k,l}\ F_v^t\ V^t \tag{1}$$
avec $U = (1\ u\ u^2\ u^3)$, $V = (1\ v\ v^2\ v^3)$ et $P_{k,l}, F_u$ et F_v trois matrices que l'on précisera.

3. Supposons qu'un point $p_{i,j}$ soit déplacé. Quelle portion de la surface $S(u,v)$ est modifiée par ce déplacement ? Pour répondre à cette question ainsi qu'aux suivantes, vous pouvez vous aider d'un dessin.

4. *Raffiner* $S(u,v)$ revient à remplacer la matrice $P_{k,l}$ ci-dessus par plusieurs matrices $Q_{k,l}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $Q_{k,l} = \alpha_{k,l}\ P_{k,l}\ \beta_{k,l}^t$, avec $\alpha_{k,l}$ et $\beta_{k,l}$ les matrices de coefficients donnant les nouveaux points en fonction des anciens. L'exemple le plus simple consiste à diviser un morceau de la surface en quatre selon le schéma de la figure 1. Dans ce cas, les matrices $\alpha_{k,l}$ et $\beta_{k,l}$ valent respectivement A_1 et A_1 (région 1), A_2 et A_1 (région 2), A_1 et A_2 (région 3), et A_2 et A_2 (région 4), avec
$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
A quelle notion vue en cours le raffinement vous fait-il penser ? Plus précisément, à quel(s) informaticien(s) célèbre(s) le cas de notre exemple vous fait-il penser ?

5. Quelle est la différence majeure entre ces deux notions ?

6. Quel est l'intérêt du raffinement dans le cadre de l'édition et de la manipulation de surfaces splines ? Donner un exemple aussi précis que possible.

7. En pratique, dans le cas de raffinements *hiérarchiques*, on préfère plutôt décrire les nouveaux points $q_{i,j}$ sous la forme $q_{i,j} = r_{i,j} + o_{i,j}$, où $r_{i,j}$ désigne le point de la surface le plus influencé par $q_{i,j}$ et $o_{i,j}$ la position de $q_{i,j}$ exprimée dans un repère associé à la surface et centré en $r_{i,j}$. Quel avantage voyez-vous à cette modélisation ?

2 Partie II : Position, orientation et mouvement (10 pts)

2.1 Minimisation d'erreur en vision par ordinateur

On s'intéresse au problème de la mise en correspondance (*pairwise registration*) de deux ensemble de n points $\mathcal{P}^1 = \{P_i^1\}$ et $\mathcal{P}^2 = \{P_i^2\}$ de $\mathbb{R}^3$, représentant le même objet observé par deux caméras différentes (voir figure 2). Dit autrement, on cherche la meilleure rotation R permettant de passer de $\mathcal{P}^1$ à $\mathcal{P}^2$; mathématiquement, cela signifie que l'on cherche à minimiser l'erreur suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{n} ||P_i^2 - R(P_i^1)||^2 \tag{2}$$

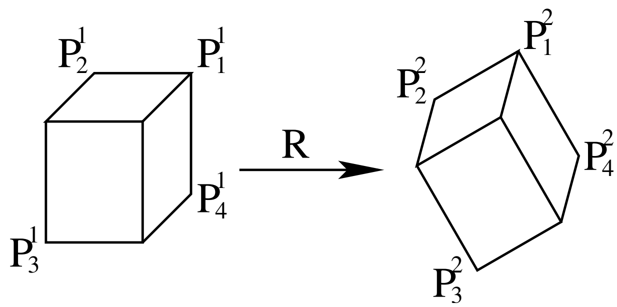

Figure 2: Un même modèle vu de deux caméras différentes.

2.2 Questions

1. Afin d'évaluer la rotation optimale R, il faut choisir comment la représenter. Que pensez-vous de l'utilisation de :
   (a) matrices ?
   (b) angles d'Euler ?
   (c) vecteurs rotation ?
2. On choisit de travailler avec le formalisme des quaternions. On note q le quaternion représentant la rotation R. Montrer que E peut se réécrire
$$E = \sum_{i=1}^{n} ||p_i^2 q - q p_i^1||^2 \tag{3}$$
   avec p_i^1 et p_i^2 des quaternions que l'on expliquera.
3. Montrer que, $\forall i \in [1, n], F_i : q \mapsto p_i^2 q - q p_i^1$ est une fonction linéaire.
4. En déduire que E peut s'écrire sous la forme
$$E = q^t \ A \ q \tag{4}$$
   où A est une matrice symétrique (on ne demande pas de calculer cette matrice).
5. Montrer que le minimum de E est donné par le vecteur propre de norme 1 associé à la plus petite valeur propre de A.
6. Conclure (tout commentaire personnel sur cette méthode est le bienvenu).
7. Essayez de formaliser une généralisation du problème à la mise en correspondance de k ensemble de points ; qu'en pensez-vous ?