Quelques rappels de maths supplémentaires

Franck Hétroy, I.N.P. Grenoble

2006-2007

1 Espace et application affines

1.1 Définitions

Définition 1 (Espace affine) *Un* espace affine *est un triplet* $\mathcal{E} = (E, V, \phi)$ *avec :*

- E *un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés* points *;*
- V *un espace vectoriel (ses éléments sont appelés* vecteurs*), appelé* direction *de* E *;*
- $\phi : E \times E \rightarrow V$ *est une application vérifiant les deux propriétés suivantes :*

$$\forall (A, B, C) \in E^3, \phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C) \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\forall A \in E, \forall \overrightarrow{v} \in V, \exists ! B \in E / \phi(A, B) = \overrightarrow{v}$$

Généralement, on note $\phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

Propriété 2 *On a les deux propriétés suivantes :*

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ *(élément neutre de* V*)* $\iff A = B$ *;*
- *soit* $X \in \mathcal{E}$ *et* $O \in E$ *; il existe* $\overrightarrow{v} \in E$ *tel que* $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{v}$.

Définition 3 (Repère affine) *Dans un espace affine* $\mathcal{E} = (E, V, \phi)$*, on appelle* repère affine *un couple* $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e})$ *constitué d'un point* O *de* E *(appelé* origine *du repère) et d'une base* $\overrightarrow{e}$ *quelconque de* V.

Définition 4 (Application affine) *Une application* $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ *est appelée* application affine *s'il existe une application linéaire* $\overrightarrow{f} : V \rightarrow V'$ *vérifiant* $\forall A, B \in E$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$*. Dans ce cas,* $\overrightarrow{f}$ *est appelée la* partie linéaire *de* f.

Propriété 5 *Une application affine* f *est déterminée par un point* O *de* E*, le transformé* $f(O)$ *de celui-ci et sa partie linéaire :*

$$\forall X \in \mathcal{E}, f(X) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX})$$

Remarque. Pour une application affine donnée, la partie linéaire est unique.

Exemple 6 *Une translation est une application affine. Sa partie linéaire est l'identité.*

1.2 Représentation matricielle des applications affines

Grâce à la propriété 5, on peut représenter une application affine de manière matricielle.
Prenons par exemple $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$. $\overrightarrow{f}$ étant linéaire, elle s'écrit de manière matricielle :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}) = M_f.\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$$

Donc $\forall X = (x, y, z) \in \mathcal{E}$,

$$f(X) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX}) = \begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \\ z'_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_O \\ y - y_O \\ z - z_O \end{pmatrix} = M_f.X + N_f$$

Ceci peut se réécrire en *coordonnées homogènes* :

$$f(X) = f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

1.3 Changement de repère

Nous nous restreignons à l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soit X un point de $\mathbb{R}^3$; on note $(X)_R$ les coordonnées homogènes de X dans un repère R.

Propriété 7 *Soient $R_1 = (O_1, \overrightarrow{e_1})$ et $R_2 = (O_2, \overrightarrow{e_2})$ deux repères* orthonormés directs *de $\mathbb{R}^3$, que l'on appelera* repère du monde *pour l'un et* repère de l'objet *pour l'autre. Alors*

$$(X)_{R_1} = \begin{pmatrix} R_2^1 & t_2^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (X)_{R_2}$$

en notant R_2^1 la matrice 3×3 de rotation dont les colonnes sont les éléments de $\overrightarrow{e_2}$ exprimés dans $\overrightarrow{e_1}$, et t_2^1 le vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ exprimé dans R_1.

2 Gradient, Jacobien et Hessien

2.1 Notation nabla

Dans cette section, f désigne une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Définition 8 (Opérateur nabla) *On note $\overrightarrow{\nabla}.$ l'opérateur $(\frac{\partial .}{\partial x_1}, \frac{\partial .}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial .}{\partial x_n})$.*

Définition 9 (Gradient, rotationnel, divergence, laplacien) *Quelques opérateurs utiles :*

- $\overrightarrow{grad}\ f = \overrightarrow{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$;
- $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v}$ *(produit vectoriel ; en anglais* cross product*, noté avec le symbole $\times$ ou $\otimes$) ;*
- $div\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ *(produit scalaire, en anglais* dot product*) ;*
- $\Delta f = div(\overrightarrow{grad}\ f) = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

2.2 Jacobien(ne)

f désigne maintenant une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X))$.

Définition 10 (Matrice Jacobienne) *On appelle* matrice Jacobienne *(ou simplement* Jacobienne*) de f la matrice suivante :*

$$\mathcal{J}(f)(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

Définition 11 (Jacobien) *On appelle* Jacobien *de f le déterminant de la Jacobienne de f : $J(f)(X) = det\ \mathcal{J}(f)(X)$*

2.3 Hessien(ne)

f désigne à nouveau une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, deux fois différentiable.

Définition 12 (Matrice Hessienne) *On appelle* matrice Hessienne *(ou simplement* Hessienne*) de f la Jacobienne des dérivées partielles $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ de f :*

$$\mathcal{H}(f)(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X) \end{pmatrix}$$

Définition 13 (Hessien) *On appelle* Hessien *de f le déterminant de la Hessienne de f : $H(f)(X) = det\ \mathcal{H}(f)(X)$*

Propriété 14 *Si les dérivées secondes de f sont [localement] toutes continues, alors la Hessienne de f est [localement] une matrice symétrique.*

2.4 Points critiques

Définition 15 (Point critique) *Si le gradient de f s'annule en un point X, alors on dit que X est un* point critique *fr f.*

Définition 16 (Point critique dégénéré) *Si de plus le Hessien de f en X est nul, alors on dit que ce point critique est* dégénéré.

Propriété 17 *Soit X un point critique* non *dégénéré de f. Alors :*

- *si la Hessienne de f en X est définie positive (c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres sont strictement positives), alors f atteint un minimum local en X ;*
- *si la Hessienne de f en X est définie négative, alors f atteint un maximum local en X ;*
- *si la Hessienne de f en X possède à la fois des valeurs propres strictement positives et des valeurs propres strictement négatives, alors on dit que X est un* point selle *de f (ceci est aussi vrai lorsque le point critique est dégénéré) ;*
- *dans les autres cas, on ne peut pas conclure.*