

Réaction aux collisions dans les animations physiques

François Faure, Olivier Galizzi
GRAVIR¹

¹*Projet commun CNRS, INRIA, INPG, UJF*



EVASION

Plan

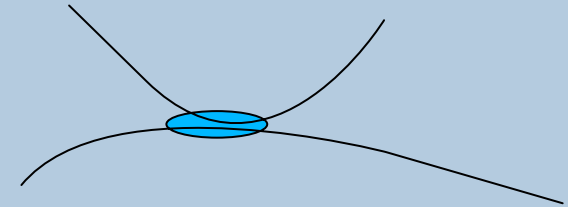
- ◆ Théories du contact
- ◆ Pénalités
- ◆ Impulsions
- ◆ Contraintes
- ◆ Approches globales
- ◆ Objets déformables
- ◆ Conclusion



EVASION

Théorie de Hertz

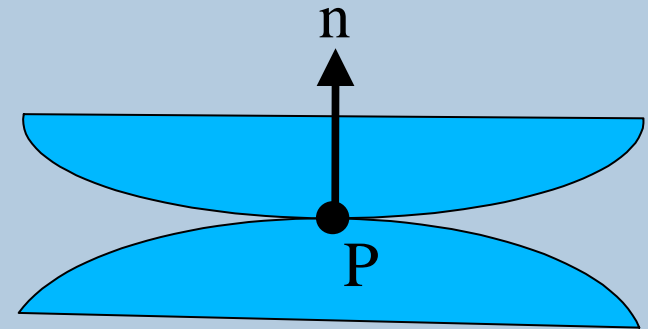
- Courbures, matériaux, forces
- -> Aire de contact, répartition de pression
- -> Résistance mécanique, résistance au roulement



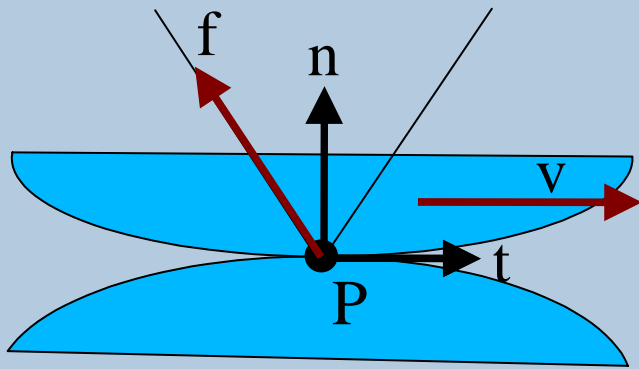
Contact ponctuel

- Géométrie: point et normale
- Contact établi:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_n = 0 \\ f_n \geq 0 \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_n > 0 \\ f_n = 0 \end{array} \right.$$



Coulomb



$$\left. \begin{array}{l} \gamma_n = 0 \\ f_n \geq 0 \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_n > 0 \\ f_n = 0 \end{array} \right.$$

$$v_t \neq 0$$

$$v_t = 0$$

$$\begin{array}{l} \vec{f}_t = \nu f_n \\ \vec{f}_t \text{ opposé à } \vec{v}_t \end{array}$$

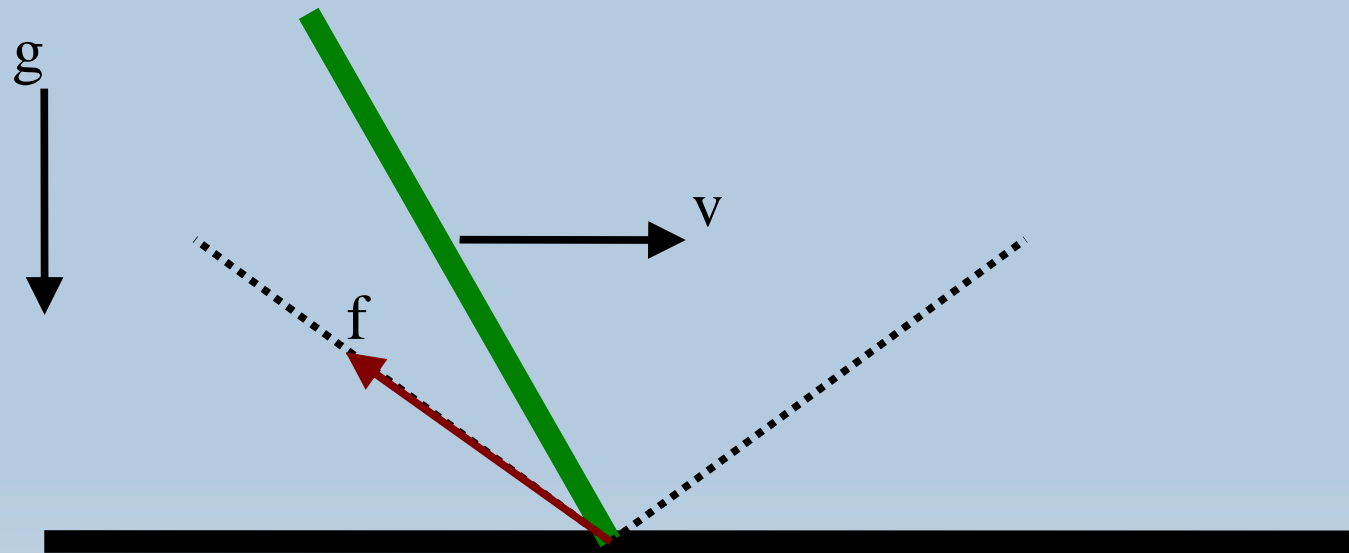
$$\left. \begin{array}{l} \gamma_t = 0 \\ f_t \leq \nu f_n \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_t \text{ opposé à } \vec{v}_t \\ f_t = \nu f_n \end{array} \right.$$

EVASION

Paradoxe de Painlevé

frottement \Rightarrow rotation \Rightarrow pénétration

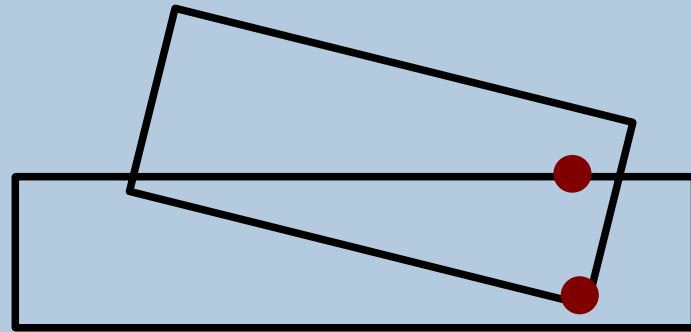
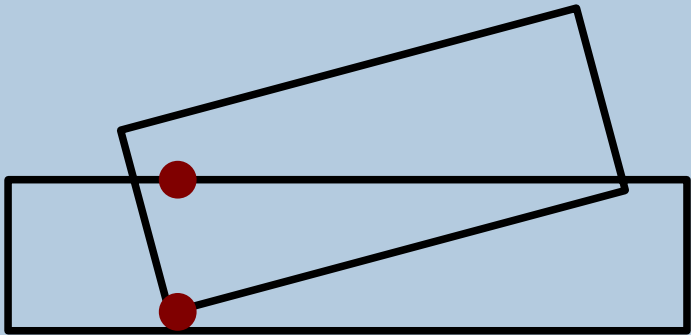
non-pénétration \Rightarrow force attractive



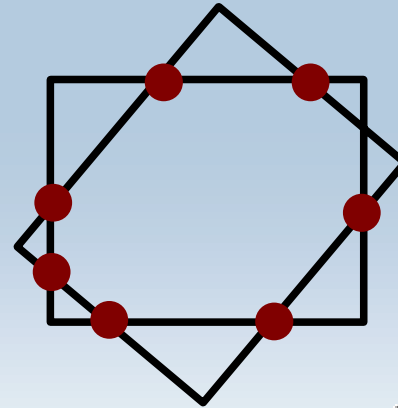
EVASION

Problème du contact non ponctuel

- Contact unique \Rightarrow oscillations



- Modéliser par plusieurs contacts



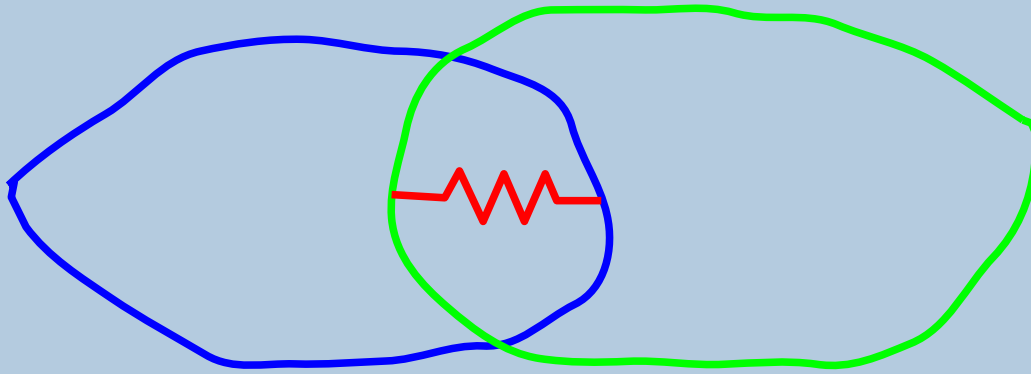
Plan

- ◆ Théories du contact
- ◆ **Pénalités**
- ◆ Impulsions
- ◆ Contraintes
- ◆ Approches globales
- ◆ Objets déformables
- ◆ Conclusion



EVASION

Pénalités



- Simple, universel, stable
[MW 88, Gim 93]
- Choix des coefficients ?
- Raideur du système

Plan

- ◆ Théories du contact
- ◆ Pénalités
- ◆ **Impulsions**
- ◆ Contraintes
- ◆ Approches globales
- ◆ Objets déformables
- ◆ Conclusion



EVASION

Collision

- Au départ: $v_n^- < 0$
- Calcul d'impulsion
 - Choc inélastique: $v_n^+ = 0$
 - Choc élastique $0 \leq \epsilon \leq 1$
 - Newton: $v_n^+ = -\epsilon v_n^-$
 - Poisson: $f_n = (1 + \epsilon) f_n$

Collision avec frottement

$$v_n^+ = 0$$

- Choc inélastique:

$$\left. \begin{array}{l} v_t^+ = 0 \\ f_t \leq \nu f_n \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} v_t^+ \neq 0 \\ f_t = \nu f_n \end{array} \right.$$

f_t opposé à v_t^+ ou à v_t^- ?

- Choc élastique

Problèmes possibles avec Newton et Poisson



EVASION

Calcul d'une impulsion

- Calcul analytique [Hahn88]
 - calculer avec hypothèses d'adhérence
 - si force tangentielle excessive
 - imposer la direction de la force
 - calculer avec hypothèse de glissement
- Calcul intégral [Mirtich 95]
 - compression: augmenter progressivement l'impulsion jusqu'à $v_n=0$
en appliquant adhérence ou glissement selon v_t
 - restitution: augmenter encore jusqu'à un facteur $1+\varepsilon$

Avancer d'un pas de temps

- Algo:

tant que dt non complet

- avancer jusqu'à la première collision
- traiter la collision

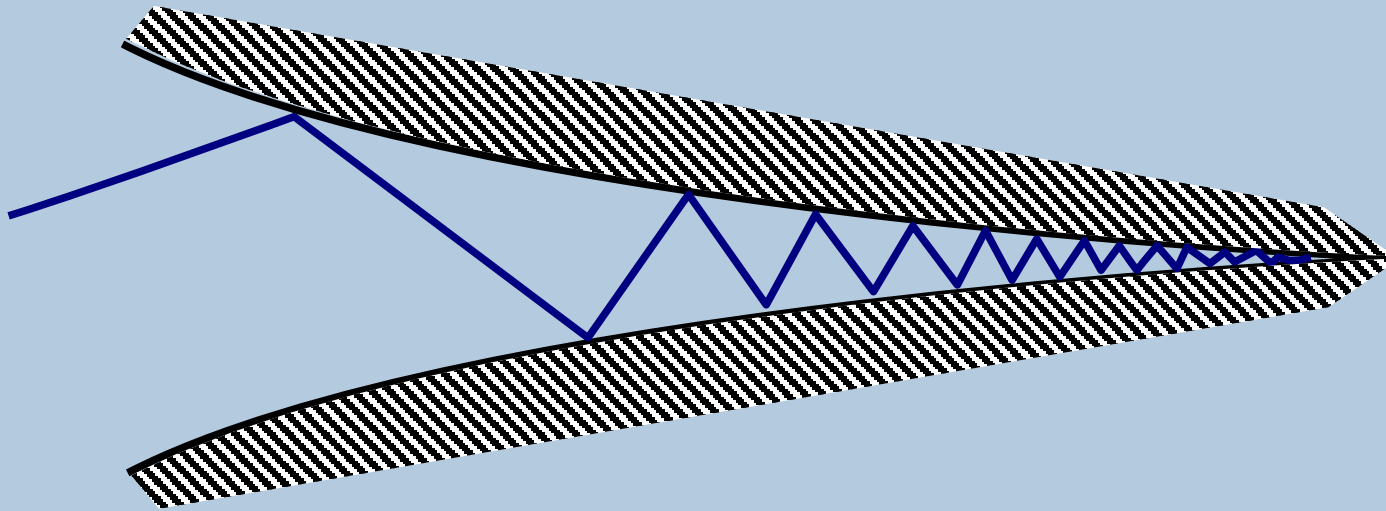
- Problème:

beaucoup de collisions => beaucoup de sous-pas de temps



« Rattling »

- Une possible infinité de sous-pas de temps



Plan

- ◆ Théories du contact
- ◆ Pénalités
- ◆ Impulsions
- ◆ **Contraintes**
- ◆ Approches globales
- ◆ Objets déformables
- ◆ Conclusion



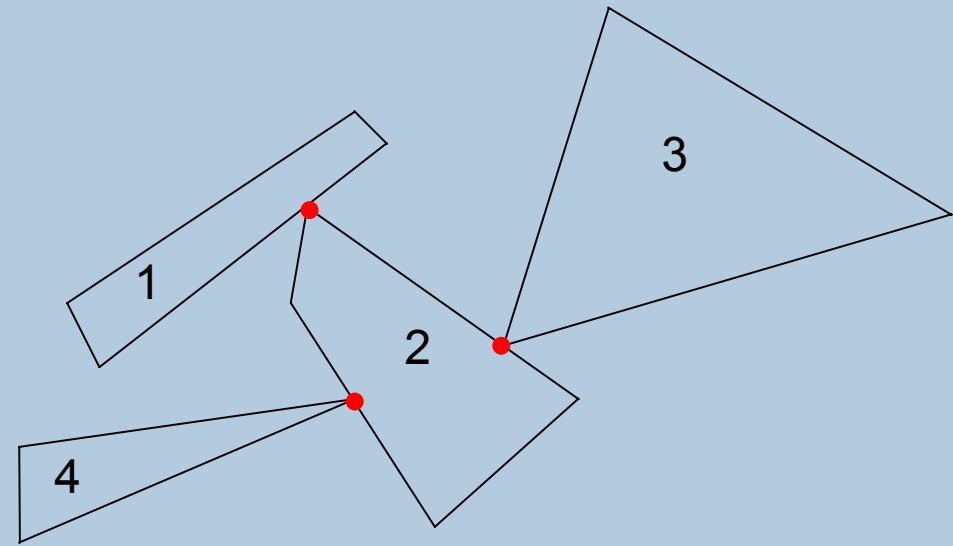
EVASION

Système, équations

$$J = \begin{bmatrix} \overbrace{j_{12} \ j_{21} \ 0 \ 0}^c \\ \underbrace{0 \ j_{23} \ j_{32} \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ j_{24} \ 0 \ j_{42}}_{6n} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{M_1 \ 0 \ 0 \ 0}^{6n} \\ \underbrace{0 \ M_2 \ 0 \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ 0 \ M_3 \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ M_4}_{6n} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{c-1} \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad c$$



n solides

c contacts

On résoud : $JM^{-1}J^t\lambda - J\ddot{q} - d \geq 0$

EVASION

Résolution des équations

- ◆ Contraintes bilatérales (égalités): Cholesky, BCG, ...
- ◆ Méthode itérative locale (Jacobi, Gauss-seidel)
 - Tant que trop d'erreur γ_n
Pour chaque contact
traiter le contact
 - $O(c^3)$
- ◆ Méthodes globales: linéarité complémentaire (LCP)

Méthodes LCP

- Formulation du problème

$Af - b \geq 0$ mouvement relatif: pas de pénétration

$f \geq 0$ forces répulsives uniquement

$(Af - b)_i f_i = 0$ complémentarité: répulsion **ou** éloignement

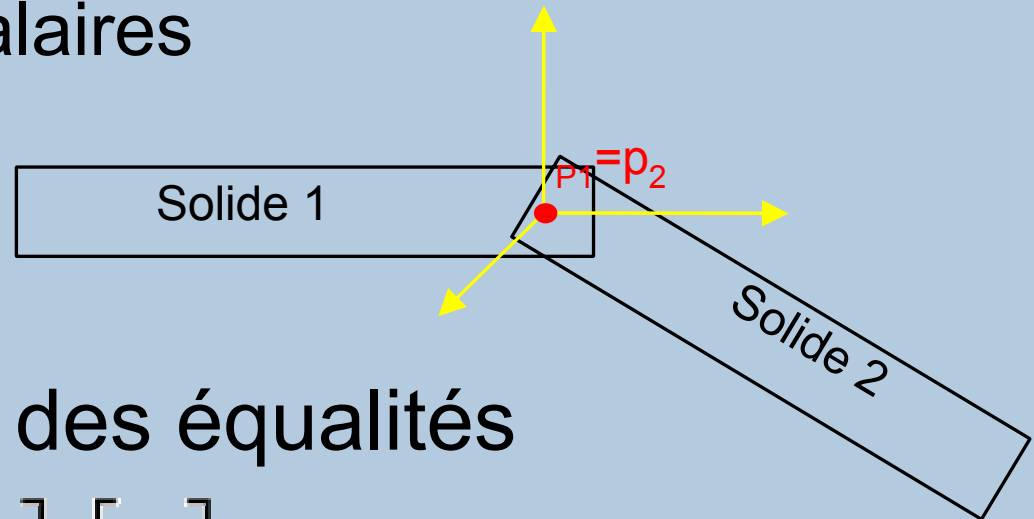
Algorithmes de résolution

- Lemke (sans frottement)
- Gradient biconjugué modifié [Faure&Galizzi 02]
- Dantzig (extensible au frottement) [Baraff 94]
- Programmation quadratique [Milenkovic 01]



Extension aux solides articulés

- Utilisation de contraintes points sur points
 - Trois contraintes scalaires
 - Pas d'inégalités



- Le système contient des égalités

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{bmatrix}$$

Points forts/Points faibles

	Pénalités	Contraintes	Impulsions
Inconvénients	Lent	Plus complexe a implémenter	Pas stable au repos
	Peu de controle	Pas de contraintes dures	Pas d'articulations
	Pas d'articulations	Nécessite combinaison	Très lent si beaucoup
	Pas de contraintes dures	avec impulsions	d'objets
Avantages	Facile a implémenter	Frottement	Facile a implémenter
	Frottement	Solides articulés	Très bon controle
	Stable au repos	Stable au repos	Frottement
			Rapide si peu d'objets

Plan

- ◆ Théories du contact
- ◆ Pénalités
- ◆ Impulsions
- ◆ Contraintes
- ◆ **Approches globales**
- ◆ Objets déformables
- ◆ Conclusion



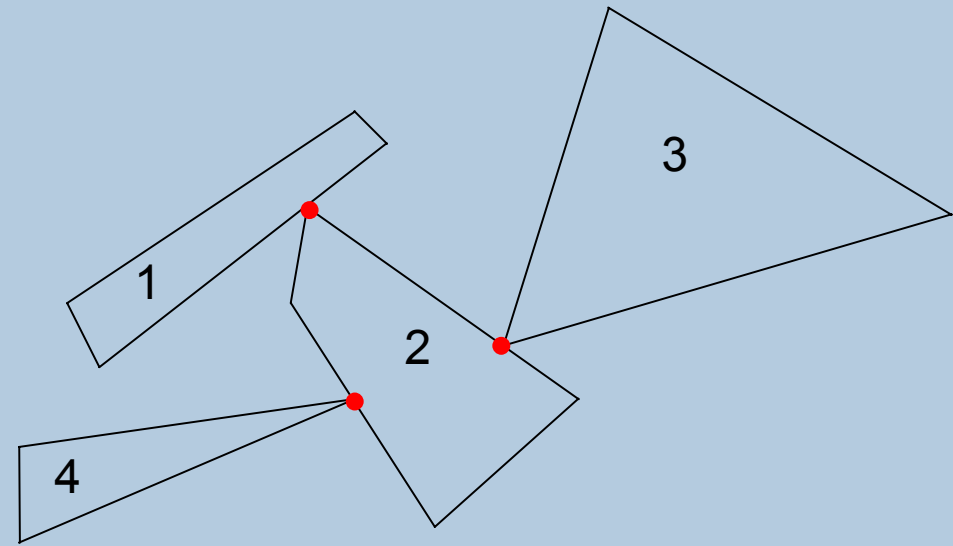
EVASION

Collisions simultanées

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \overbrace{j_{12} \ j_{21} \ 0 \ 0}^c \\ \underbrace{0 \ j_{23} \ j_{32} \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ j_{24} \ 0 \ j_{42}}_{6n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overbrace{M_1 \ 0 \ 0 \ 0}^{6n} \\ \underbrace{0 \ M_2 \ 0 \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ 0 \ M_3 \ 0}_{6n} \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ M_4}_{6n} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{c-1} \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad c$$



n solides

c collisions

On résoud : $\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T\lambda - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \geq \mathbf{0}$

EVASION

Rebonds

♦ Poisson:

- calculer f
- appliquer $(1+\varepsilon)f$
- réitérer si besoin

♦ Newton:

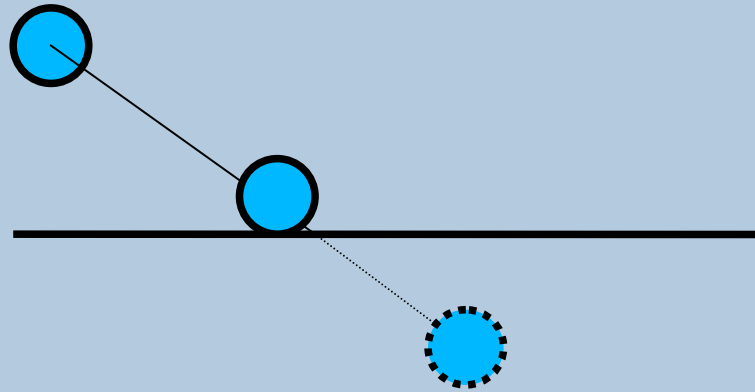
- $b = (1+\varepsilon)v$
- calculer et appliquer f
- réitérer si besoin



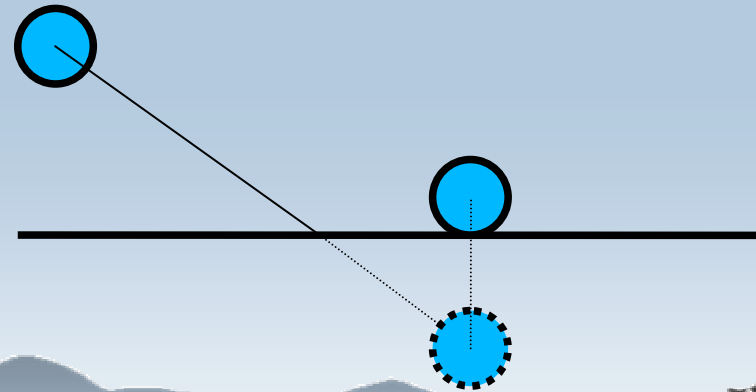
EVASION

Synchronisation des collisions

- Chaque objet s'arrete à sa première collision
[Milenkovic 02]



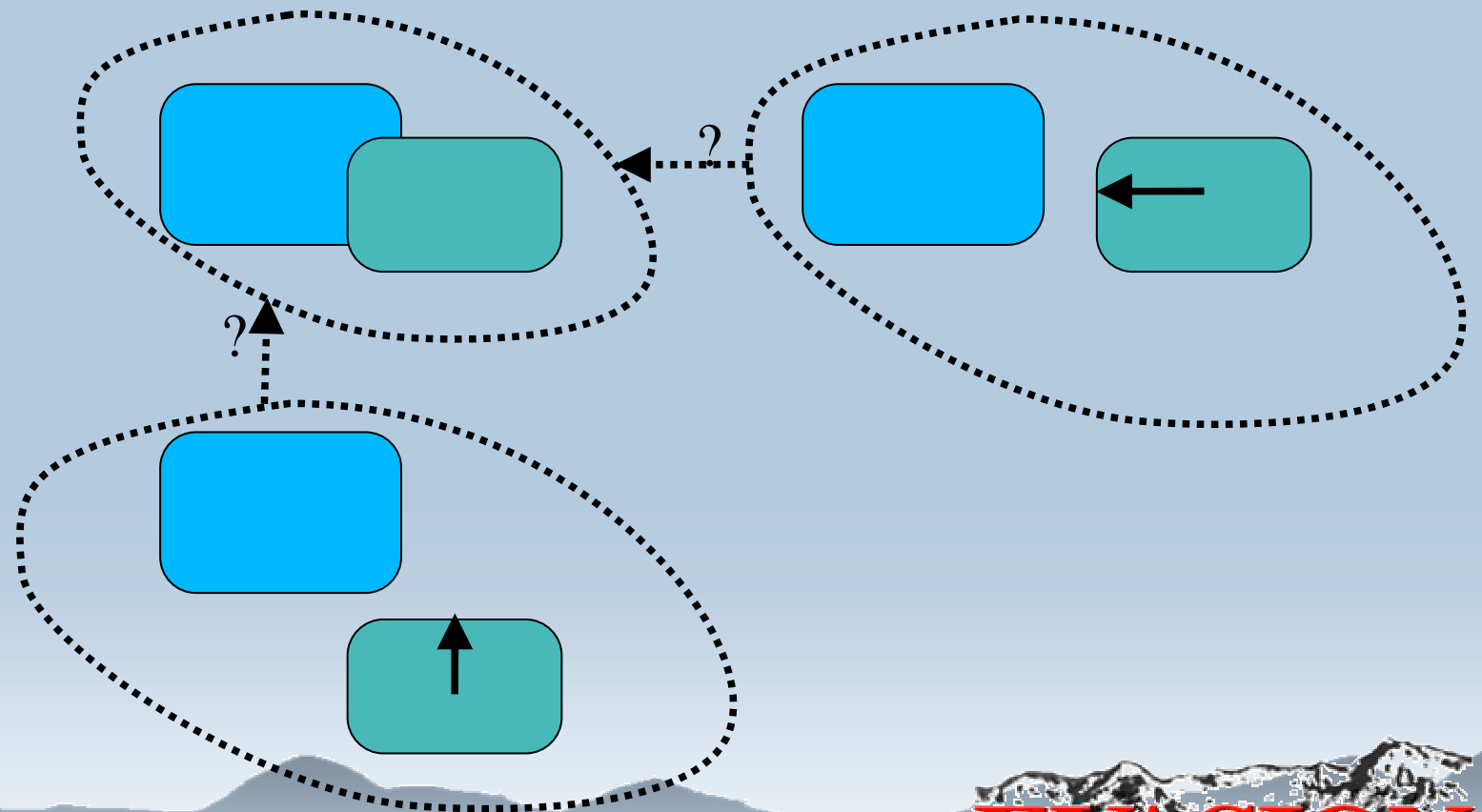
- Rectification ultérieure des positions et vitesses
[Faure&Galizzi 02]



Synchronisation des collisions

- ◆ Inconvénients:

- ◆ nécessité de traiter des interpénétrations
- ◆ historique

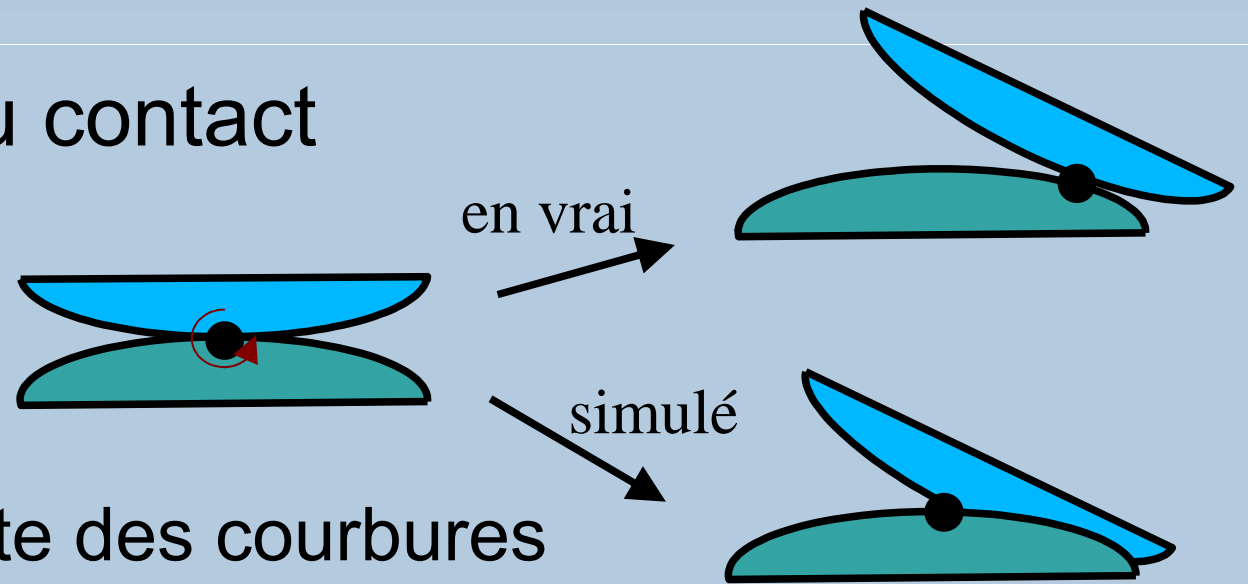


Prise en compte des collisions

Post-Traitement des collisions	date exacte	
	interruption totale	interruption partielle
Baraff 94	Hahn 88	Mirtich 00
Milenkovic 01	Moore & Wilhelm 88	
Faure & Galizzi 02	Mirtich 94	
Guendelman & Bridson & Fedkiw 03		

Il y aura forcément pénétration

- ◆ Cinématique du contact



- ◆ Prise en compte des courbures pas suffisant
- ◆ Positionnement relatif par repère intermédiaire de contact limité

=> nécessité de modéliser l'interpénétration !

Corriger la pénétration

- ♦ stabilisateurs de Baumgarte $\dot{\gamma}_n = -\alpha v_n - \beta p_n$
- ♦ pénalités $f_n = -\alpha v_n - \beta p_n$
- ♦ correction instantanée des positions $p_n = 0$

résoudre $\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^t\lambda - p_n \geq 0$

méthodes traitant:

- ordre 2: forces, accélérations
- ordre 1: impulsions, changements de vitesse
- ordre 0: , déplacements instantanés



EVASION

Comparaison des approches

	Traitement local des collisions	Traitement global des collisions
Ordre 2 (Contraintes)		Baraff 94 Featherstone 83
Ordre 1 (Impulsions)	Hahn 88 Moore & Wilhelm 88 Mirtich 94	
Ordre 0		Milenkovic 96
Ordre 1 + 2		Mirtich 96
Ordre 0 + 1 + 2		Milenkovic 01
Ordre 0 + 1 (+2)		Faure & Galizzi 02

Plan

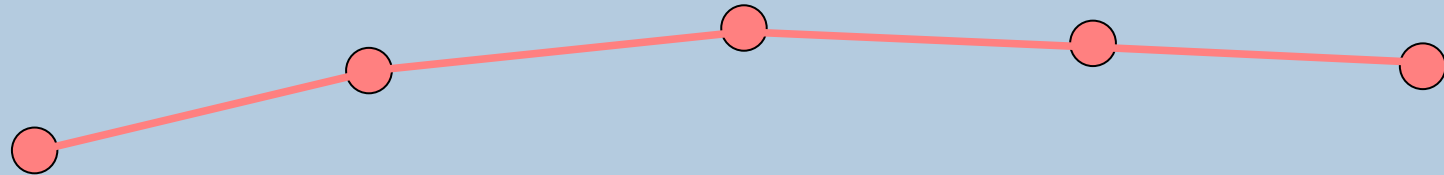
- ◆ Théories du contact
- ◆ Pénalités
- ◆ Impulsions
- ◆ Contraintes
- ◆ Approches globales
- ◆ **Objets déformables**
- ◆ Conclusion



EVASION

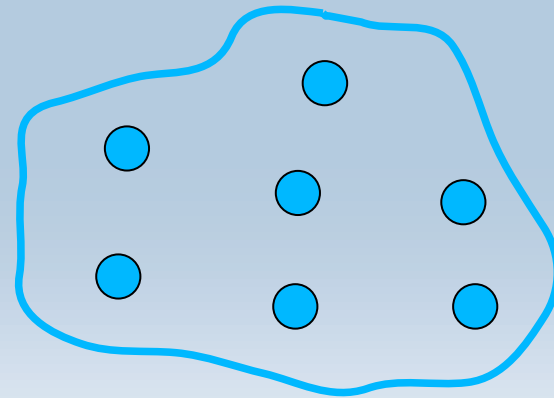
Corps déformables

- ◆ Lignes et surfaces



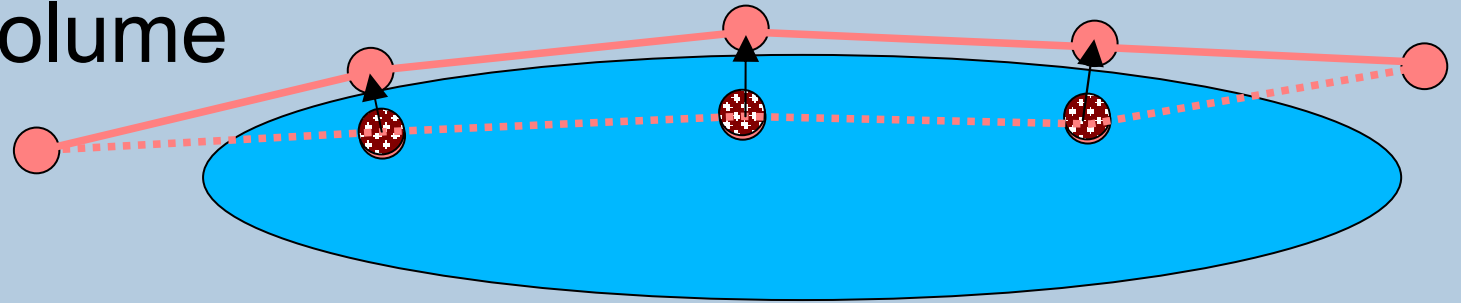
- ◆ Modèles à couches

- ◆ Primitives dynamiques
- ◆ Surface externe



Lignes et surfaces

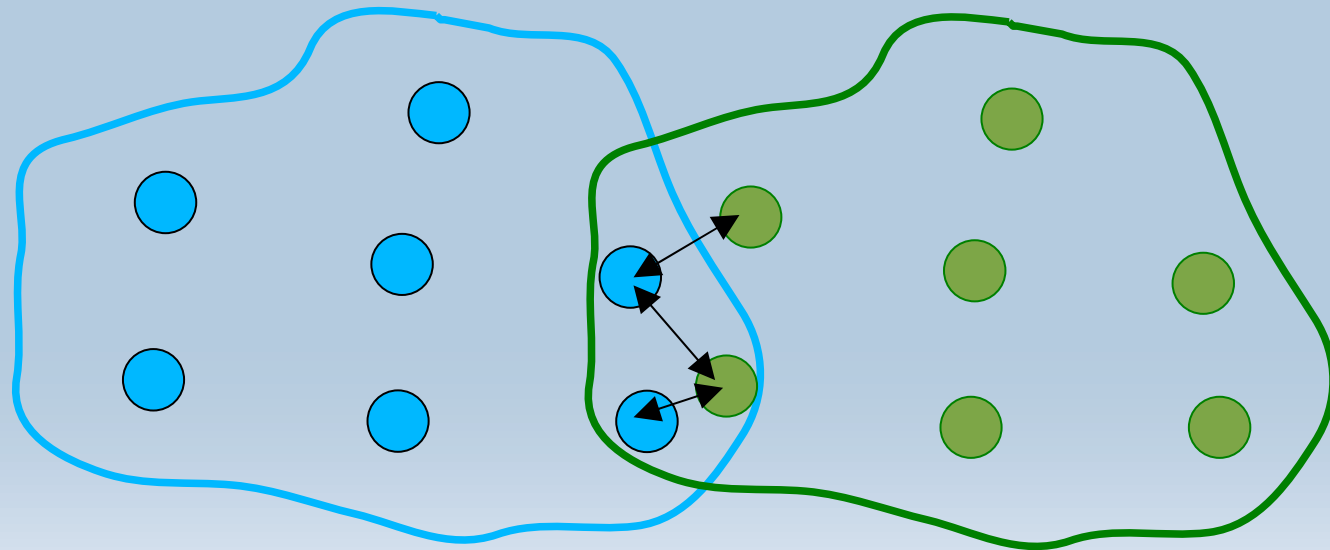
- Ligne ou surface contre volume: collisions particule-volume



- Surface contre surface: collisions particule-triangle et arete-arete [BF02]
équations sur 4 points

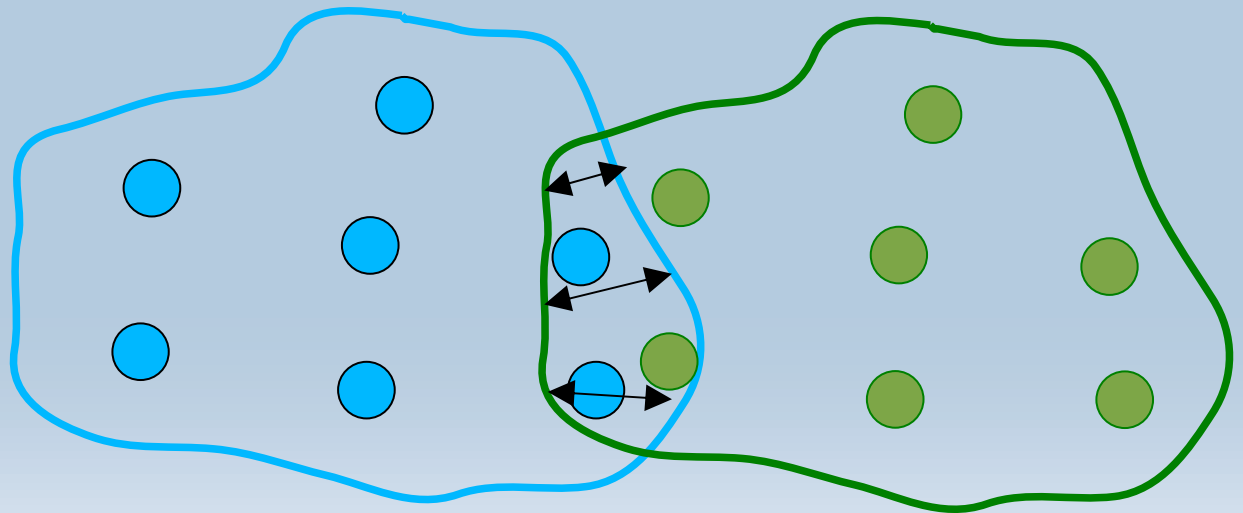
Volumes

- ▶ Pénalités [Cani-Gascuel 93, Desbrun 95]
 - ▶ Localiser et quantifier l'interpénétration
 - ▶ Appliquer des forces aux primitives concernées



Volumes

- Dynamique lagrangienne [Baraff 91]
 - Exprimer des contraintes aux points de controle géométriques de la surface
 - En déduire des équations sur les primitives dynamiques
 - Résoudre



Conclusion

- Domaine bien étudié
 - Intérêt des approches globales: efficacité algorithmique, simultanéité des collisions
- Problèmes ouverts
 - Caractérisation du contact
 - Lois mécaniques
 - Modélisation géométrique
 - Stabilité
 - Calcul global efficace avec frottement



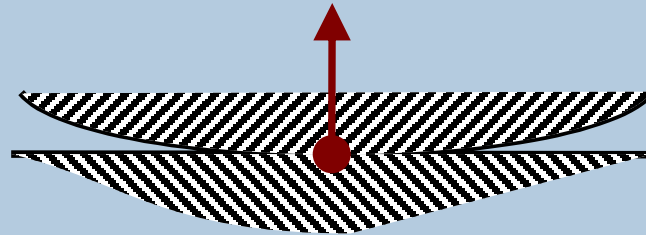
EVASION

Système d'équations

- Trouver la magnitude λ_i des l'impulsions a appliquer pour annuler les vitesses de pénétration
- λ = magnitude des impulsions a appliquer
- $\mathbf{J}^T \lambda$ = impulsions exprimées aux centres de gravité
- $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda$ = variation des vitesses des repères locaux
- $\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda$ = variations des vitesses de pénétration

Caractériser les collisions

- En accélération et vitesses: (point, normale)



- En position: (point, normale, profondeur) ou (point, point)

