

Systemes dynamiques

François Faure

Table des matieres

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Systeme du premier ordre | 2 |
| 1.1 | Principe | 2 |
| 1.2 | Mise en oeuvre | 2 |
| 1.2.1 | Schéma d'integration d'Euler | 2 |
| 1.3 | Difficultés | 2 |
| 1.4 | Exemple : champ attractif | 2 |
| 1.5 | Implémentation | 4 |
| 2 | Schémas d'integration | 5 |
| 2.1 | Euler | 5 |
| 2.2 | Midpoint | 6 |
| 2.3 | Choix du schéma | 6 |
| 3 | Systemes d'ordre 2 | 7 |
| 3.1 | Lois élémentaires | 7 |
| 3.2 | Pesanteur | 7 |
| 3.3 | Viscosité | 7 |
| 3.4 | Ressort | 7 |
| 3.5 | Amortisseur | 8 |
| 3.6 | Ressort amorti | 9 |
| 3.7 | Integration du temps | 10 |
| 4 | Collisions | 10 |
| 4.1 | Principe du traitement | 10 |
| 4.2 | Détection de collision | 10 |
| 4.3 | Configuration annulant l'interpénétration | 11 |
| 4.4 | Rebond | 11 |
| 5 | Applications | 11 |
| 5.1 | Liaisons souples | 11 |
| 5.2 | Corps déformables | 12 |
| 5.2.1 | Principe | 12 |

1 Système du premier ordre

1.1 Principe

Loi d'évolution :

$$\dot{q}(t) = f(q, t)$$

Ligne de courant (fig. 1) :

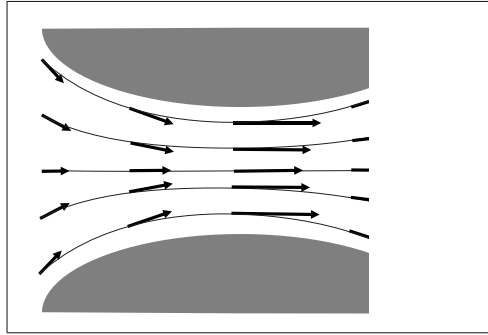


FIG. 1 – Un champ de vitesses. En gras les vitesses, en fin les lignes de courant.

- trajectoire d'une particule
- tangente aux vitesses

1.2 Mise en oeuvre

1.2.1 Schéma d'intégration d'Euler

Calcul de l'état suivant :

$$q(t + dt) = q(t) + \dot{q}(t)dt$$

Petits pas en suivant la vitesse. Approximation : vitesse uniforme sur l'espace parcouru. Illustration sur la figure 2.

1.3 Difficultés

Selon la qualité de l'approximation la simulation peut être fautive quantitativement ou qualitativement (fig. 3).

1.4 Exemple : champ attractif

Équation Les vitesses convergent vers un point (fig. 4) : $\dot{q} = -\alpha qp \quad \alpha > 0$
En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_p - x_q \\ y_p - y_q \end{pmatrix}$$

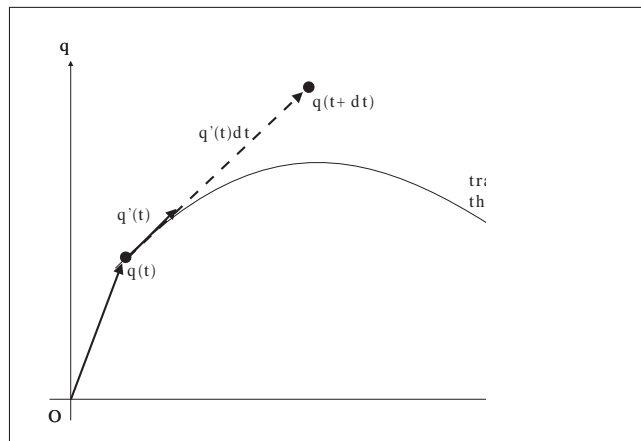


FIG. 2 – Schéma d'intégration d'Euler

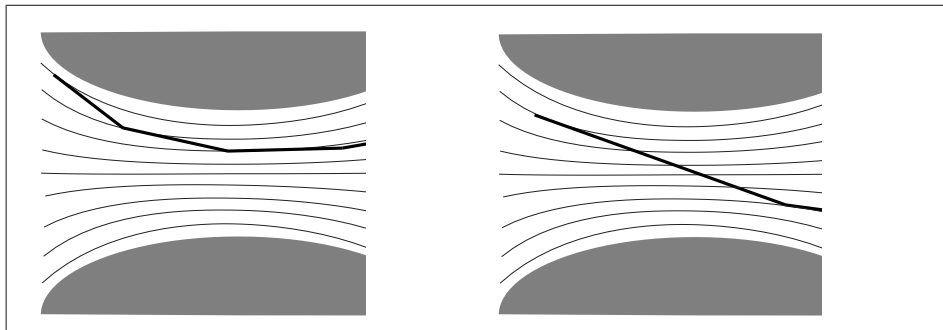


FIG. 3 – Dérive dûe aux approximations. L'erreur quantitative (gauche) peut dégénérer en erreur qualitative décelable par un observateur (droite).

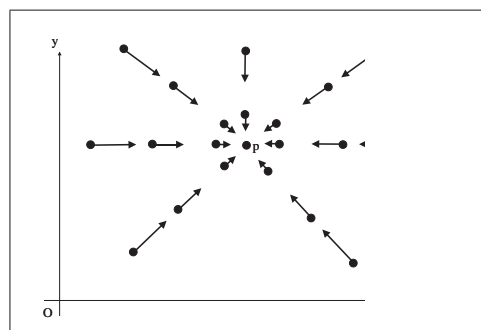


FIG. 4 – Champ attractif. Les vitesses (flèches grasses) convergent vers une cible.

Solutions théoriques en fonction de α pour une même distance initiale d_0 (figure 5) :

$$d = d_0 e^{-\alpha t}$$

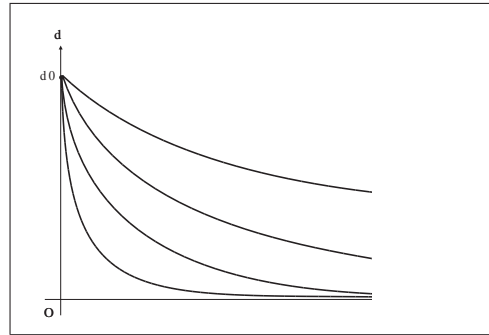


FIG. 5 – Évolution de la distance à la cible pour différentes valeurs de α .

Application : Un objet déplacé ou déformé retrouve progressivement sa configuration initiale (fig. 6).

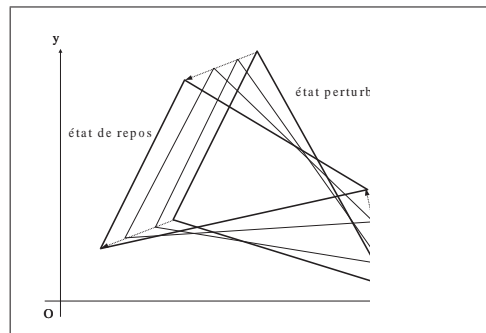


FIG. 6 – Application d'un champ attractif aux points de contrôle d'une forme géométrique.

Difficultés : divergence si α ou dt trop grands (fig. 7).

1.5 Implémentation

Il faut distinguer pas de temps d'affichage Δt et pas de temps de simulation dt , généralement plus court. La boucle d'animation dynamique s'écrit alors comme en figure 8.

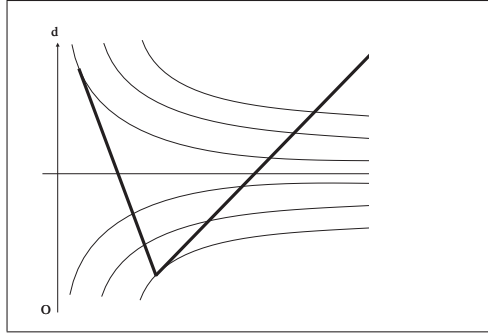


FIG. 7 – Divergence due to large time steps.

```

faire indéfiniment :
- faire n fois :
  - calculer  $\dot{q} = f(q, t)$ 
  -  $q \leftarrow q + \dot{q} \frac{\Delta t}{n}$ 
  -  $T \leftarrow T + \frac{\Delta t}{n}$ 
- afficher

```

FIG. 8 – Boucle d'animation dynamique.

2 Schémas d'intégration

Le schéma d'intégration est l'algorithme qui permet de calculer l'état à l'instant suivant à partir de l'instant courant en effectuant une intégration du temps, comme exprimé par la formule :

$$q(t+h) = q(t) + \int_t^{t+h} \dot{q}(q, t) dt \quad (1)$$

où h représente la longueur du pas de temps effectué. Il existe une quantité de schémas d'intégration, qui se distinguent par leur *ordre de précision*, leur *stabilité* et leur *coût* en terme de temps de calcul. Tous sont approximatifs car on ne sait pas calculer l'intégrale de la formule (1) dans le cas général.

2.1 Euler

Le schéma d'Euler présenté en figure 2 fait l'approximation que la dérivée tout au long du pas de temps est égale à sa valeur au début du pas. Si nous écrivons la formule de Taylor pour q nous obtenons :

$$q(t+h) = q(t) + h\dot{q}(t) + O(h^2)$$

où le dernier terme exprime une quantité bornée par un polynôme d'ordre 2. Le schéma d'Euler applique les deux premiers termes du développement, on dit qu'il est d'*ordre 1*.

2.2 Midpoint

Le schéma du *midpoint* améliore l'approximation de la dérivée en exprimant celle-ci à mi-chemin entre le début et la fin du pas de temps. On obtient ainsi une méthode d'ordre 2, mais qui nécessite deux calculs de dérivée par pas de temps. Pour estimer la dérivée au milieu du pas, un demi pas d'Euler est préalablement effectué, comme illustré sur la figure 9. L'algorithme est présenté en figure 10.

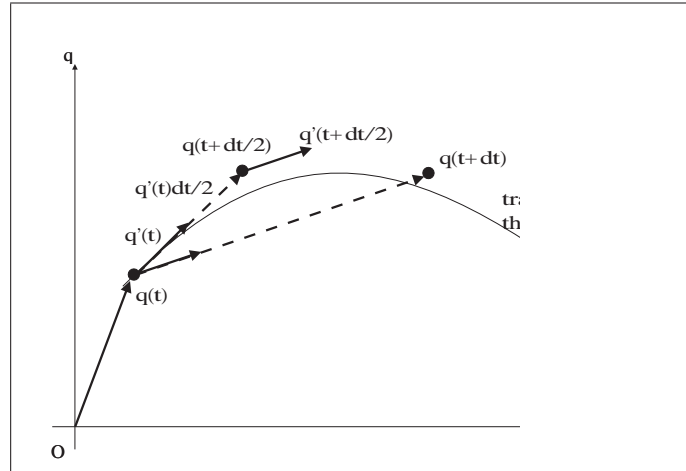


FIG. 9 – Méthode du midpoint.

$$\begin{aligned} q' &= f(q, t) \\ q_2 &= q + q' * \frac{h}{2} \\ q' &= f(q_2, t + \frac{h}{2}) \\ q &+= q' * h \end{aligned}$$

FIG. 10 – Algorithme du midpoint.

2.3 Choix du schéma

Le choix du schéma résulte d'un compromis entre précision et temps de calcul. Le très répandu schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 nécessite quatre calculs de dérivée par pas de temps. La stabilité (éviter la divergence) entre aussi en ligne de compte. On peut dégager des tendances par domaine d'application :

- calcul scientifique : ordres 4,5
- animation : ordres 1,2,4,5

3 Systèmes d'ordre 2

Dans un système d'ordre 2 (à ne pas confondre avec un schéma d'intégration d'ordre 2), on sait seulement calculer la dérivée seconde (accélération) du système :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t)$$

De tels systèmes permettent de simuler des lois physiques et ainsi d'obtenir des animations et des formes d'aspect naturel. Des lois élémentaires communes (Newton) permettent de combiner divers modèles d'action (gravite, ressorts,...).

3.1 Lois élémentaires

Loi d'inertie (première loi de Newton) Permet de calculer l'accélération d'une particule i de masse m_i en fonction des forces qui lui sont appliquées :

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{i \neq j} f_{i \rightarrow j}$$

Loi d'interaction (deuxième loi de Newton) Les forces sont réciproques, au signe près :

$$f_{j \rightarrow i} = -f_{i \rightarrow j}$$

3.2 Pesanteur

Dans une scène terrestre la pesanteur g est uniforme et applique un poids proportionnel à la masse :

$$f_{\rightarrow i} = m_i g$$

3.3 Viscosité

La viscosité d'un milieu s'oppose au mouvement des corps qui s'y déplacent. Elle se modélise par un coefficient ν positif qui agit dans la direction opposée à la vitesse :

$$f_{\rightarrow i} = -\nu \dot{q}_i \quad \nu \geq 0$$

3.4 Ressort

Un ressort sert à simuler un comportement élastique qui tend à ramener deux particules à une distance donnée l'une de l'autre (fig. 11).

L'action d'un ressort est proportionnelle à son allongement et à sa raideur :

$$f_{j \rightarrow i}^{(k)} = k \left(\frac{\|q_i - q_j\| - l}{\|q_i - q_j\|} \right) \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|} \quad (2)$$

où le premier terme est la constante de raideur, le deuxième terme représente l'allongement relatif (l est la longueur au repos), et le troisième terme est un vecteur normalisé qui représente la direction de l'effort.

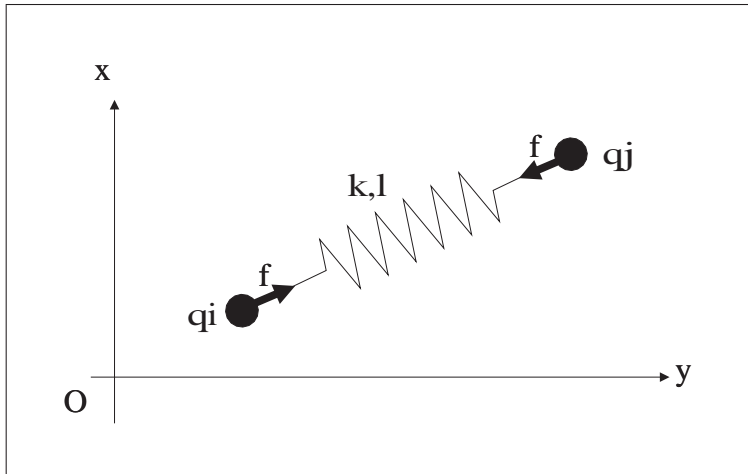


FIG. 11 – Ressort entre deux particules.

3.5 Amortisseur

Un amortisseur sert à réduire le mouvement relatif de deux particules (fig. 12). L'action

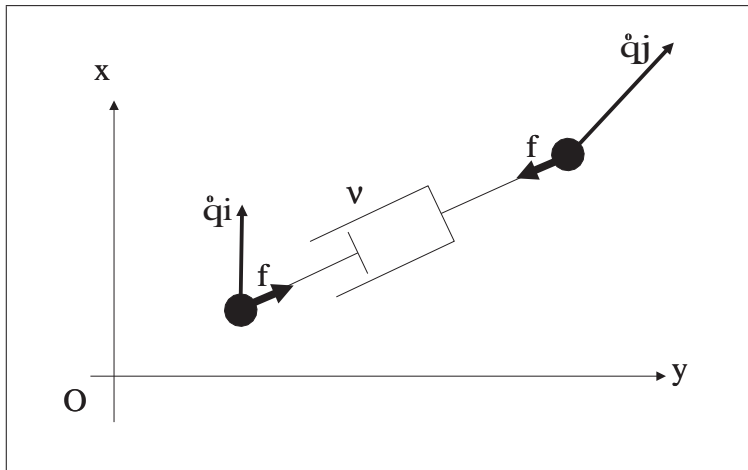


FIG. 12 – Amortisseur entre deux particules.

d'un amortisseur est proportionnel à sa viscosité ν et à sa vitesse d'allongement (différence des vitesses projetées sur la direction). L'action sur une particule i est donnée par la relation :

$$f_{j \rightarrow i}^{(\nu)} = \nu \left(\frac{\dot{q}_i - \dot{q}_j}{\|q_i - q_j\|} \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|} \right) \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|} \quad (3)$$

où le premier terme est la constante de viscosité, le deuxième terme est la vitesse d'allongement relatif, et le troisième terme la direction de la force.

3.6 Ressort amorti

Un ressort amorti s'obtient en combinant un ressort et un amortisseur en parallèle, comme illustré sur la figure 13. la force se calcule en sommant les contributions définies

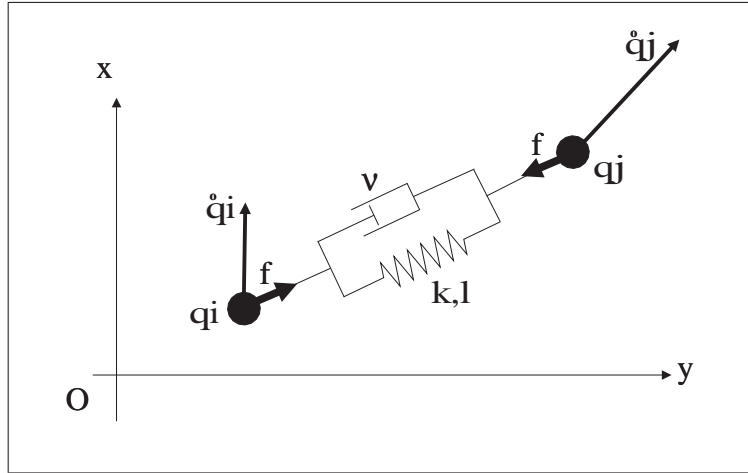


FIG. 13 – Ressort amorti.

pour le ressort (eq. 2) et l'amortisseur (eq. 3) :

$$f_{j \rightarrow i} = f_{j \rightarrow i}^{(k)} + f_{j \rightarrow i}^{(v)}$$

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent se représenter par des ressorts amortis, par exemple les corps déformables élastiques. Selon les valeurs des coefficients utilisés, le retour à une position d'équilibre s'accompagne ou non d'oscillations, comme illustré sur la figure 14.

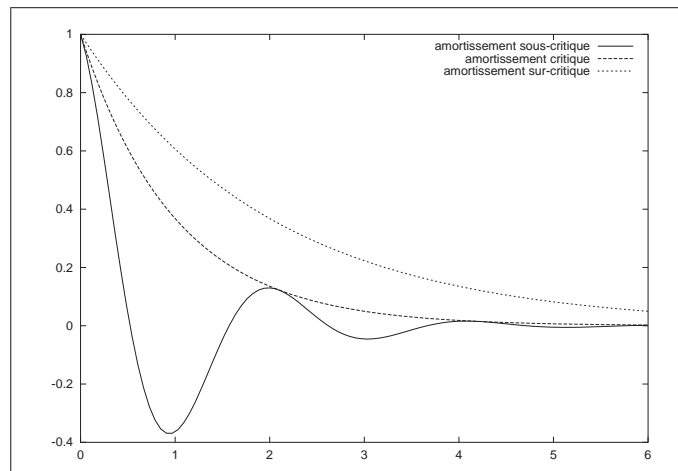


FIG. 14 – Différentes chemins vers la position d'équilibre.

3.7 Intégration du temps

Dans un système d'ordre 2 l'état est représenté par les positions et les vitesses. On peut soit utiliser un schéma d'intégration *ad hoc* comme celui de Newton-Cotes, soit se ramener à un système d'ordre 1 pour utiliser les schémas les plus généraux.

Le schéma de Newton-Cotes correspond au développement à l'ordre 2 de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}\dot{q}(t+h) &= \dot{q}(t) + h\ddot{q}(t) \\ q(t+h) &= q(t) + h\dot{q}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}(t)\end{aligned}$$

Il présente l'avantage d'être exact pour les accélérations constantes (cas de la chute libre).

Se ramener à l'ordre 1 consiste à exprimer l'état Q comme l'ensemble des positions et des vitesses, sa dérivée étant constituée de l'ensemble des vitesses et des accélérations.

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix}$$

On peut ainsi exploiter la diversité des schémas conçus pour les systèmes d'ordre 1.

4 Collisions

Les chocs se produisent pendant des intervalles extrêmement brefs et nécessitent un traitement direct de la position et de la vitesse.

4.1 Principe du traitement

Soit une particule traversant un plan entre l'instant t et l'instant $t+h$. Le traitement de collision (fig. 15) s'effectue en trois temps :

1. détection de collision
2. recherche d'une configuration annulant l'interpénétration
3. rebond

4.2 Détection de collision

La détection de collision est un problème très complexe dans le cas général. Pour une particule contre un plan il suffit d'écrire que la distance au plan est négative, autrement dit :

$$pq.n < 0$$

où le plan est modélisé par un point p et une normale n , et q est la position de la particule.

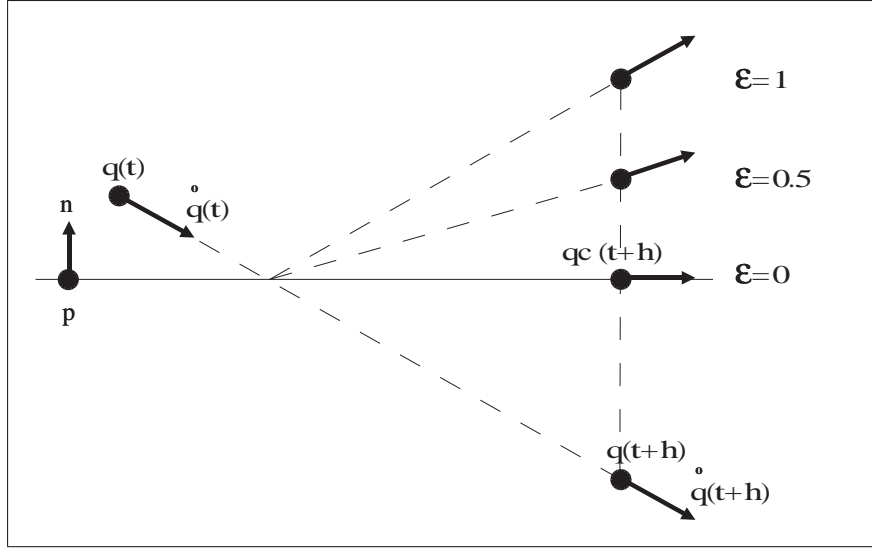


FIG. 15 – Détection et traitement de la collision d'une particule sur un plan.

4.3 Configuration annulant l'interpénétration

Une fois une collision détectée, on cherche dans quelle configuration seraient les objets si le choc était parfaitement absorbant. Dans le cas de la particule contre un plan fixe, cela revient à projeter cette particule et sa vitesse sur le plan, autrement dit :

$$\begin{aligned} q_c &= q - pq.n n \\ \dot{q}_c &= \dot{q} - \dot{q}.n n \end{aligned}$$

4.4 Rebond

Le rebond correspond à la restitution de l'énergie absorbée au cours du choc. On le caractérise par un coefficient ϵ normalement compris entre 0 (choc parfaitement absorbant) et 1 (choc parfaitement élastique). La différence entre la configuration de choc mou et la configuration d'interpénétration est reportée proportionnellement à ϵ (loi de Poisson). Autrement dit :

$$\begin{aligned} q &= q_c + \epsilon(q_c - q) \\ \dot{q} &= \dot{q}_c + \epsilon(\dot{q}_c - \dot{q}) \end{aligned}$$

5 Applications

5.1 Liaisons souples

Le mouvement simplifié d'un arbre agité par le vent peut se résumer à un angle $\theta(t)$ comme illustré sur la figure 16. Le mouvement peut suivre la loi :

$$m\ddot{\theta} = f(t) + f^{(k)}(\theta) + f^{(\nu)}(\theta)$$

où $f(t)$ représente une force exercée par le vent, et $f^{(k)}(\theta)$ et $f^{(\nu)}(\theta)$ des forces de ressort amorti.

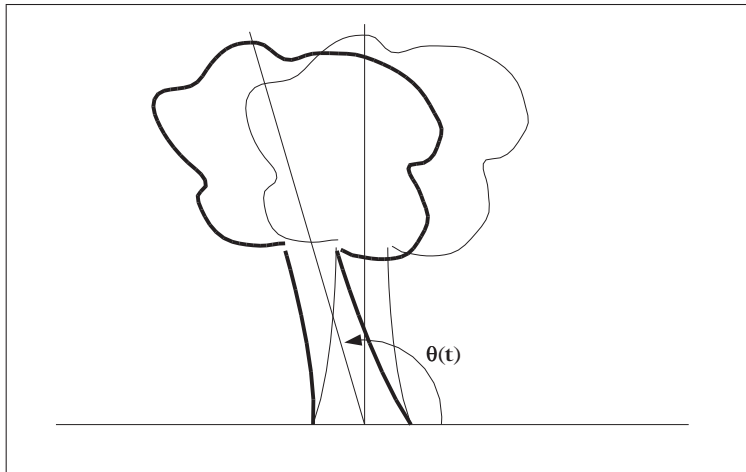


FIG. 16 – Mouvement d'un arbre déterminé par un paramètre $\theta(t)$.

Il n'est pas toujours facile de régler les coefficients !

5.2 Corps déformables

5.2.1 Principe

Un réseau de masses-ressorts peut servir à représenter une structure déformable. Un habillage géométrique permet alors d'obtenir l'apparence souhaitée, comme illustré sur la figure 17.

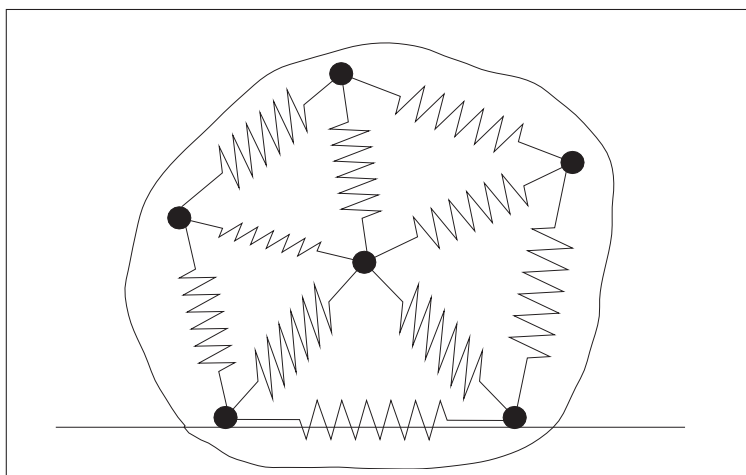


FIG. 17 – Un corps mou représenté par un système masses-ressorts, avec habillage géométrique.

Le modèle informatique d'un tel réseau de masses-ressorts est le graphe orienté. L'orientation permet de décider quel signe appliquer à la force (loi d'interaction). Les noeuds contiennent les modèles de particules (position, vitesse, masse) et les arêtes contiennent les informations sur les ressorts (raideur, viscosité, longueur au repos). L'algorithme présenté

en figure 18 effectue un calcul de forces et applique un pas de temps à un système masses-ressorts.

```
{ calcul de f }
pour chaque particule i
-  $f_i = gm_i$ 
pour chaque arête ij
-  $f = f_{ij}(q_i, \dot{q}_i, q_j, \dot{q}_j)$ 
-  $f_i + = f$ 
-  $f_j - = f$ 
{ calcul de  $\ddot{q}$  }
pour chaque particule i
-  $\ddot{q}_i = f_i/m_i$ 
{ intégration du temps (euler) }
pour chaque particule i
-  $\dot{q}_i + = h * \ddot{q}_i$ 
-  $q_i + = h * \dot{q}_i$ 
```

FIG. 18 – Calcul des forces dans un système masses-ressorts.