

---

# Rappels sur les opérateurs différentiels

---

Nous rappelons ici la définition des différents opérateurs différentiels que l'on peut appliquer à un champ vectoriel. Les définitions sont données pour un champ vectoriel dans l'espace, mais s'étendent de façon naturelle aux champs planaires par exemple.

On peut classer ces opérateurs d'après l'ordre (premier ou second) de leurs dérivées, ainsi que par la variable (temps ou espace) par rapport à laquelle on dérive.

## 1 Dérivées par rapport au temps

Ces dérivées sont simples et intuitives.

### 1.1 Opérateurs du premier ordre

Dériver une fois par rapport au temps transforme une position en vitesse, une vitesse en accélération.

$$\mathbf{p}_{,t} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial t} \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} \\ \frac{\partial p_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v}_{,t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

### 1.2 Opérateurs du second ordre

L'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps :  $\mathbf{p}_{,tt} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t^2} = \mathbf{a}$ .

## 2 Dérivées par rapport à l'espace

### 2.1 Opérateurs du premier ordre

Ces opérateurs utilisent les dérivées premières du champ vectoriel. On peut dériver chacune des composantes d'un champ vectoriel par rapport à n'importe laquelle des directions. On a donc, en trois dimensions, 9 dérivées spatiales premières pour un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{v}_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial j} \quad , \quad (i,j) \in (x,y,z) \quad (\text{A.2})$$

Parmi ces dérivées et leurs combinaisons, il en est trois particulières qui ont des interprétations précises.

– Le *gradient* d'un champ scalaire  $s$  est un vecteur défini par :

$$\mathbf{grad} s = \begin{pmatrix} s_{,x} \\ s_{,y} \\ s_{,z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Ce vecteur n'est autre qu'une extension de la classique dérivée d'une fonction à un espace de dimension supérieure. Il indique donc la pente locale de la fonction, le vecteur obtenu étant dirigé le long de la plus grande pente au champ  $s$ .

Par extension, on définit le gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  comme la matrice  $3 \times 3$  dont chaque ligne contient le gradient de la composante associée de  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

– La *divergence* d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  est un scalaire défini par :

$$\text{div} \mathbf{v} = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} \quad (\text{A.5})$$

Sommant les dérivées des composantes de  $\mathbf{v}$  dans les trois directions, il peut s'interpréter comme un terme de mesure locale de l'expansion (ou de la dilatation) du champ. Si on considère en effet un petit cube centré autour d'un point, le terme  $v_{i,i}$  mesure comment les faces alignées avec l'axe  $i$  se sont déplacées dans la direction  $i$ . La divergence est une somme sur les trois directions de ces dilatations locales.

Par extension, on définit la divergence d'un tenseur  $\alpha$  (matrice  $3 \times 3$  symétrique) comme le vecteur de taille 3 dont chaque composante est la divergence de la ligne correspondante de la matrice :

$$\mathbf{div} \begin{pmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{1y} & \alpha_{1z} \\ \alpha_{2x} & \alpha_{2y} & \alpha_{2z} \\ \alpha_{3x} & \alpha_{3y} & \alpha_{3z} \end{pmatrix} = \mathbf{div} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{div}(\alpha_1) \\ \text{div}(\alpha_2) \\ \text{div}(\alpha_3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

– Le *rotationnel* d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  est un vecteur défini par :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{y,z} - v_{z,y} \\ v_{z,x} - v_{x,z} \\ v_{x,y} - v_{y,x} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Ce terme, apparenté à un produit vectoriel, est une approximation de l'axe de rotation des déformations locales du champ  $\mathbf{v}$ . On l'interprète facilement comme l'axe d'un tourbillon en mécanique des fluides, le champ  $\mathbf{v}$  représentant la vitesse du liquide. Ce rotationnel est nul pour tous les champs  $\mathbf{v}$  linéaires en les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

## 2.2 Opérateur Nabla

L'opérateur nabla ( $\nabla$ ) est pratique lorsqu'il s'agit d'écrire des dérivées premières.  $\nabla$  est un vecteur de coordonnées  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ . Les opérateurs précédents sont alors exprimés simplement par :

- $\mathbf{grad} s = \nabla s$
- $\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$
- $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}$

où  $\cdot$  et  $\wedge$  représentent respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel.

## 2.3 Opérateurs du second ordre

Les opérateurs du second ordre sont généralement des combinaisons de ceux du premier ordre. Nous utiliserons en particulier  $\mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{v})$  et  $\Delta \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{grad} \mathbf{v}$  ( $\Delta$  est appelé l'opérateur *laplacien*). La  $i^{\text{ème}}$  composante de ces opérateurs s'exprime par :

$$\mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{v})_i = v_{x,xi} + v_{y,yi} + v_{z,zi} \quad (\text{A.8})$$

$$(\Delta v)_i = v_{i,xx} + v_{i,yy} + v_{i,zz} \quad (\text{A.9})$$

---

# Les méthodes d'intégration

---

Les méthodes présentées permettent de calculer dans une configuration donnée les forces en chaque point. Il existe différentes façons de les *intégrer* dans le temps et nous en présentons ici quelques unes.

## 1 Difficultés

On peut employer différentes méthodes d'intégration, toutes demandent d'adapter le pas de temps d'intégration à la valeur des accélérations. Si le pas de temps est trop petit, on perdra du temps de calcul alors que s'il est trop grand le système divergera.

La difficulté à intégrer dépend de l'amplitude de l'accélération *et* de sa direction. Un schéma de Newton-Cotes intégrera ainsi parfaitement une accélération constante (la gravité par exemple), quelle que soit son intensité. Que la direction de celle-ci change un peu au cours du temps et il faudra réduire de façon drastique le pas de temps.

## 2 Dépendance de l'intégration

En élasticité linéaire, on a, d'après le principe fondamental de la dynamique, une loi de la forme :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} = \frac{k \cdot x}{m}$$

où  $k$  est la raideur du matériau et  $x$  une mesure de déplacement.

Un développement de Taylor donne la nouvelle position  $p'$  d'un point  $p$  comme égale à

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{v} dt + \mathbf{a} dt^2 + O(dt^3) \quad (\text{B.1})$$

pour un pas de temps  $dt$  donné.

La vitesse  $\mathbf{v}$  de ce moment de la simulation est ce qu'elle est, mais on peut jouer sur les autres paramètres pour diminuer l'écart de position  $\delta p = p' - p$  qui va être généré par l'intégration. Plus explicitement :

$$\delta p \simeq \mathbf{a} dt^2 = \frac{k x dt^2}{m} \quad (\text{B.2})$$

Pour réduire cet écart et donc ne pas aller trop vite dans l'intégration, on voit donc que le plus efficace est de baisser le pas de temps puisque ce terme est quadratique dans l'équation précédente. L'autre moyen,

moins efficace consiste à prendre des matériaux mous et donc des raideurs faibles, à ne bouger que faiblement les points (ce qui peut revenir à modifier les unités pour avoir un objet de très petite taille) pour limiter les déplacements ou enfin à prendre des objets lourds avec plus d'inertie.

Une autre remarque tirée de [Mes97] est que si l'on augmente le nombre de points de la discrétisation, on va accroître l'instabilité. La masse de chaque point devra en effet diminuer pour que la masse totale soit conservée. Or la fréquence d'oscillation correspondant à la solution de l'Équation B.2 est  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  et va donc s'en trouver augmentée, ce qui demandera un plus faible pas de temps pour une intégration correcte.

Cette remarque rejoint le critère de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy, qui stipule que la distance parcourue par une onde se propageant dans le matériau doit être inférieure à la distance entre deux points de discrétisation. On comprend intuitivement que la propagation de cette onde ne pourrait être bien calculée si elle pouvait ainsi "sauter" une maille.

En augmentant le nombre de points, on réduit la taille du maillage et il faut donc diminuer la distance parcourue par l'onde (dont la vitesse est proportionnelle à  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ) entre deux intégrations et donc baisser le pas de temps.

### 3 Intégration explicite

Les méthodes d'intégration explicites sont les plus simples et s'appuient directement sur le développement de Taylor donné plus haut (Eq. B.1). La plus simple d'entre elles est la méthode d'*Euler*, qui n'utilise que des développements limités d'ordre 1 pour écrire :

$$\mathbf{v}_{t+dt} = \mathbf{v}_t + \mathbf{a}_t dt \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{p}_{t+dt} = \mathbf{p}_t + \mathbf{v}_t dt \quad (\text{B.4})$$

Simpliste, elle offre néanmoins parfois de bons résultats.

En faisant dépendre la nouvelle position de la *nouvelle* vitesse et non plus de celle du pas précédent, on obtient le schéma d'*Euler modifié*. En pratique beaucoup plus stable que le précédent. Il a été démontré comme étant d'ordre 4 par Provost dans sa thèse [Pro97] et donne souvent des résultats supérieurs à ceux de Runge-Kutta 2 (voir *supra*).

$$\mathbf{v}_{t+dt} = \mathbf{v}_t + \mathbf{a}_t dt \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{p}_{t+dt} = \mathbf{p}_t + \mathbf{v}_{t+dt} dt \quad (\text{B.6})$$

On pourra parfois lui préférer la méthode de *Newton-Cotes* :

$$\mathbf{v}_{t+dt} = \mathbf{v}_t + \mathbf{a}_t dt \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{p}_{t+dt} = \mathbf{p}_t + \mathbf{v}_t dt + \mathbf{a}_t dt^2 \quad (\text{B.8})$$

qui présente l'intéressant avantage d'intégrer correctement les accélérations constantes (la gravité par exemple).

Citons aussi la méthode de *Stoermer* qui donne de bons résultats, même avec de fortes raideurs :

$$\mathbf{b}_{t+dt} = \mathbf{b}_t + \mathbf{a}_t dt^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{p}_{t+dt} = \mathbf{p}_t + \mathbf{b} \quad (\text{B.10})$$

où  $\mathbf{b}$  est un vecteur servant d'accumulateur initialisé à 0 au départ.

Il existe des méthodes d'ordres plus élevés, offrant plus de précision, mais nécessitant en contrepartie le calcul de la force pour des positions intermédiaires entre  $t$  et  $t + dt$ . L'ordre de ces méthodes dépend du nombre de calculs de forces supplémentaires à effectuer. Les plus utilisées sont celles de Runge-Kutta, d'ordre 2 et 4 (voir [PTVF92] pour plus de détails). Plus chères, elles sont également mal appropriées aux simulations dynamiques faisant apparaître des collisions et où apparaissent des discontinuités dans le mouvement.

## 4 Intégration implicite

L'intégration implicite fut remise au goût du jour par Baraff et Witkin dans [BW98]. Elle donne d'excellents résultats pour des raideurs élevées que l'intégration explicite ne sait gérer, ou au prix d'un pas de temps rédhibitoire.

L'idée consiste à ne plus trouver la nouvelle position en fonction des forces connues à un instant, mais à chercher la position où les forces à  $t + dt$  *auraient conduits*, si on les avait intégrées en partant de la position courante. Plutôt qu'un bond en aveugle dans le futur, on cherche un état où les forces sont compatibles avec la position. Mathématiquement, Euler deviendrait :

$$\mathbf{v}_{t+dt} = \mathbf{v}_t + \mathbf{a}_t dt \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{p}_{t+dt} = \mathbf{p}_t + \mathbf{v}_{t+dt} dt \quad (\text{B.12})$$

Cela demande donc de connaître  $\mathbf{a}_{t+dt}$  pour trouver  $\mathbf{p}_{t+dt}$ , ce qui paraît impossible puisque la force dépend elle-même de la position.

On écrit alors un développement limité à l'ordre 1 de l'expression de la force en fonction de la position

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}$$

qui va permettre de connaître approximativement la force d'une position proche. Puisque la force dépend de la position d'un point *et* de celle de ses voisins, l'expression  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}$  va être représentée par une matrice qu'il va falloir inverser.

Le coût de l'inversion de la matrice à chaque pas de temps est largement compensé par le gain en stabilité de la méthode et par le pas de temps qui peut alors être employé, en comparaison avec le pas de temps infime nécessaire avec de fortes raideurs dans une intégration explicite.

Il est à noter que les méthodes implicites avaient déjà été utilisées par Terzopoulos *et al.* dans leur article de 1987 [TPBF87].

Citons pour information deux articles qui ont été cités comme utilisant des éléments finis et une intégration implicite [OPT83, HLW83], mais publiés dans des revues de physique, non disponibles sur la toile et que nous n'avons pu nous procurer.

Desbrun a repris cette méthode en l'accélérant jusqu'à l'obtention de temps réel en approximant la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}$  comme constante (ce qui revient à considérer les ressorts comme ayant une longueur à vide nulle) et donc pré-inversible [DSB99]. Desbrun montre que cela revient à ajouter une viscosité artificielle (force inversement proportionnelle aux vitesses, modulée par un coefficient dépendant de la raideur et du pas de temps) et à appliquer un filtrage sur les forces appliquées aux particules.

Les simplifications entraînées par cette hypothèse sont corrigées en ajoutant des forces qui vont corriger le moment d'inertie de l'objet, suivies d'un post-traitement itératif limitant la longueur de chacun des ressorts.

Une meilleure gestion des collisions est introduite dans [MDDB00], permettant une simulation très fluide du mouvement d'un tissu. L'intégration implicite est une méthode à la mode et d'autres développements, que nous jugeons plus douteux (faux) dans leurs fondements mathématiques, ont été présentés dans [EEH00].



---

# Green-Lagrange en pratique

---

Nous décrivons ici brièvement les formules nécessaires à l'implémentation d'un modèle déformable utilisant le formalisme de Green-Lagrange, dans un cadre d'éléments finis explicites. L'objet est supposé maillé à l'aide de tétraèdres, que l'on aura pris soin de générer aussi réguliers que possible pour des raisons d'efficacité et de stabilité numérique.

Après un rappel rapide de notions d'élasticité, nous donnons les formules qui permettront d'implémenter ce formalisme.

## 1 Rappels d'élasticité

Nous reprenons ici les principales équations décrivant l'élasticité des objets déformables. On se reportera à la Section 1.2 du Chapitre 2 pour une description plus complète.

Le *tenseur des déformations*  $\varepsilon$  est défini en tout point du matériau. Le terme situé en  $(i, j)$  a pour expression, dans le cas de Green-Lagrange :

$$(\varepsilon)_{ij} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Omega_j} \right) - \delta_{ij} \quad (\text{C.1})$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon).

$\Omega$  représente le vecteur de  $\mathfrak{R}^3$  représentant les coordonnées d'un point dans le repère lié au matériau.  $\mathbf{x}(\Omega)$  représente la position d'un point dans le repère du monde en fonction de ses coordonnées matérielles. Les deux systèmes de coordonnées se correspondent (à une transformation rigide près, voir la Section 1.2 du Chapitre 2) lorsque l'objet est au repos, créant ainsi un tenseur des déformations nul.

$\mathbf{x}(\Omega)$  est une fonction continue qui varie en fonction des déformations de l'objet (les coordonnées matérielles  $\Omega$  d'un point sont fixes, mais sa position dans l'espace  $\mathbf{x}$  variera au cours du temps).

Le *tenseur des contraintes*  $\sigma$  représente la distribution de force à l'intérieur du matériau. Tout comme  $\varepsilon$ , on peut l'approximer au premier ordre par une matrice  $3 \times 3$ . La force  $\mathbf{f}$  agissant sur une surface élémentaire  $dS$ , de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}$  est :  $\mathbf{f} = \sigma \mathbf{n} dS$ .

La théorie de l'élasticité linéaire suppose que déformations et contraintes sont linéairement liées (comme dans un ressort idéal). Si le matériau est considéré comme isotrope, des raisons de symétrie font que seuls 2

coefficients décrivent le comportement du matériau :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{C.2})$$

où  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$  et  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  la trace de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé :  $\mu$  représente la rigidité du matériau tandis que  $\lambda$  mesure son incompressibilité (un matériau incompressible a théoriquement un  $\lambda$  infini).

L'énergie potentielle élastique  $E$  est définie en tout point du matériau par :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{C.3})$$

Sa dérivée par rapport à la position du point créera la force qui sera appliquée en chaque point.

## 2 Forces dissipatives

L'ajout de forces dissipatives est simple et cohérent avec la description faite des précédents tenseurs. Le tenseur des taux de déformations  $\mathbf{v}$  est la dérivée par rapport au temps de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (Eq. C.1) :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}, \quad (\mathbf{v})_{ij} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_j} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Omega_j} \right) \quad (\text{C.4})$$

où  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$  est la vitesse d'un point.

$\boldsymbol{\sigma}$  est mis à jour grâce à une équations identique à celle utilisée pour  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (Eq. C.2) :

$$\boldsymbol{\sigma} += \phi \operatorname{tr}(\mathbf{v}) \mathbf{I}_3 + 2\psi \mathbf{v} \quad (\text{C.5})$$

où  $\phi$  et  $\psi$  contrôlent la vitesse avec laquelle le matériau perd son énergie cinétique. Un mouvement rigide de l'objet ne sera pas atténué avec cette formulation ( $\mathbf{v} \equiv 0$ ) qui ne dissipe que les vibrations internes.

## 3 Éléments finis explicites

Nous décrivons ici les équations des éléments finis explicites, appliqués à des maillages tétraédriques d'objets 3D. Au lieu de regrouper toutes les équations relatives à tous les points dans un grand système matriciel, comme dans les éléments finis classiques, les éléments finis *explicites* résolvent les équations relatives à chaque élément *séparément*. Cette approximation locale réduit énormément la taille du système à résoudre et donc le temps de calcul, au prix d'une perte en précision. Pour qu'une information (un déplacement imposé par l'utilisateur par exemple) se propage entre deux éléments, il faudra en particulier maintenant autant d'itérations qu'il y a d'éléments entre ces deux éléments. L'obtention de méthodes de calcul temps-réel doit se faire au prix de ces approximations.

Nous avons choisi des éléments tétraédriques et des fonctions de bases linéaires (voir Chapitre 1, Section 7) pour leur très bon compromis vitesse-efficacité. Pour chaque élément  $E$ , la fonction de base linéaire  $a^i x + b^i y + c^i z + d^i$  associée à un sommet  $i$  de  $E$  peut être représentée<sup>1</sup> comme un vecteur  $\mathbf{L}^i = (a^i \ b^i \ c^i \ d^i)$ .

Par définition des fonctions de base linéaires, appliquer  $\mathbf{L}^i$  à un point situé à l'intérieur de l'élément tétraédrique  $E$  donne ses coordonnées barycentriques à l'intérieur du tétraèdre. La coordonnée barycentrique d'un sommet  $i$  valant 1 au sommet  $i$  et 0 aux autres sommets, on a :

$$\mathbf{L}^i \cdot \begin{pmatrix} \Omega^j \\ 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1..4 \quad (\text{C.6})$$

Pour chaque sommet  $i$ , ces quatre équations ( $j \in 1..4$ ) forment un système linéaire qui peut être inversé si l'élément  $E$  n'est pas dégénéré (c'est à dire aplati, ce qui n'est pas le cas avec notre méthode par construction).

<sup>1</sup>Les exposants représentent la valeur en un sommet donné ( $\mathbf{d}, \Omega^j$ ) tandis que les indices représentent les composantes d'un vecteur ( $\Omega_1 = \Omega_x, \Omega_2 = \Omega_y, \Omega_3 = \Omega_z$ ).



La fonction d'interpolation résultante  $\mathbf{L}^i$  va nous permettre de calculer les dérivées exprimées dans le repère associé au matériau.

Tout champ vectoriel  $\mathbf{c}$  peut être linéairement interpolé sur l'élément  $E$  en utilisant les coordonnées barycentriques. Pour un point situé à l'intérieur de l'élément de coordonnées  $\Omega$ , la valeur de  $\mathbf{c}(\Omega)$  est :

$$\mathbf{c}(\Omega) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{c}^i \mathbf{L}^i \cdot \begin{pmatrix} \Omega \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Les dérivées (dans le repère lié au matériau) peuvent alors être exprimées par :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \Omega_j} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{c}^i (\mathbf{L}^i)_j \quad (\text{C.8})$$

En utilisant cette équation aux champs vectoriels position et vitesse, on est capable de calculer en chaque sommet  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Omega_i}$  et  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Omega_i}$ , et donc la valeur des tenseurs  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\sigma$  décrits précédemment.

La force au sommet  $i$  résultant de la déformation de  $E$  s'exprime par (voir [OH99]) :

$$\mathbf{f}^i = -\frac{\text{vol}^E}{2} \sum_{j=1}^4 \mathbf{x}^j \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\mathbf{L}^i)_k (\mathbf{L}^j)_l (\sigma)_{kl} \quad (\text{C.9})$$

où  $\text{vol}^E$  est le volume du tétraèdre  $E$ .

Tous les calculs présentés l'ont été pour un élément  $E$  donné, et s'appliquent à ses quatre sommets. Il suffit ensuite de répéter ces calculs pour chacun des éléments qui composent l'objet, chaque sommet *sommant* les contributions (*i.e.* la force résultante) de tous les tétraèdres auquel il appartient.

