INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INP GRENOBLE

Spécialité **Imagerie, Vision, Robotique**

Préparée au Laboratoire GRAVIR/IMAG-INRIA, UMR CNRS C5527,
dans le cadre de l'**École Doctorale "Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique"**

Présentée et soutenue publiquement

par

Florence BERTAILS

le 23 juin 2006

Simulation de chevelures virtuelles

Directrice de thèse : Marie-Paule CANI
Co-directeur : Basile AUDOLY

JURY

M. Georges-Henri COTTET	Professeur - UJF Grenoble	, Président
M. Bruno ARNALDI	Professeur - INSA Rennes	, Rapporteur
M. Dinesh K. PAI	Professeur - Rutgers, New Jersey	, Rapporteur
M. Pierre POULIN	Professeur - Université de Montréal	, Rapporteur
Mme Marie-Paule CANI	Professeur - INP Grenoble	, Directrice de thèse
M. Basile AUDOLY	Chargé de recherches - CNRS Paris VI	, Co-directeur de thèse
M. Jean-Luc LÉVÊQUE	Responsable de la prospective - L'Oréal	, Examinateur

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier ma directrice de thèse, Marie-Paule Cani, pour m'avoir permis de travailler sur ce sujet de recherche passionnant, et pour m'avoir donné la chance de participer à de multiples collaborations pluridisciplinaires tout au long de ma thèse. Ses encouragements constants et sa grande disponibilité malgré son emploi du temps chargé m'ont été d'une aide précieuse au cours de ce travail.

J'aimerais aussi remercier chaleureusement Basile Audoly, mon co-encadrant de thèse, spécialiste en modélisation mécanique, avec qui j'ai étroitement collaboré pendant trois ans pour mettre au point un modèle mécaniquement réaliste de cheveux, et à qui je dois à peu près toutes les connaissances que j'ai acquises en mécanique. Grâce à sa rigueur scientifique, sa pédagogie, et sa grande disponibilité à mon égard, j'ai eu le privilège de pouvoir me former pendant ma thèse à cette nouvelle discipline que je trouve passionnante, et qu'il est selon moi extrêmement utile de connaître afin d'aborder sainement les problèmes de simulation de phénomènes naturels.

J'adresse tous mes remerciements à nos collaborateurs industriels de L'Oréal, Jean-Luc Lévêque, Bernard Querleux, et Frédéric Leroy, pour leur implication dans notre projet commun, leur aide pour nous fournir des données réelles, et leur soutien constant au cours de ces trois ans de collaboration. Cela a été vraiment un plaisir pour moi que de participer à cette collaboration très pluridisciplinaire sur la modélisation des cheveux, et de pouvoir découvrir les nombreux problèmes de recherche qui peuvent se poser dans l'industrie du cosmétique.

Un grand merci à Bruno Arnaldi, Dinesh K. Pai et Pierre Poulin, pour avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse, ainsi qu'à Georges-Henri Cottet pour avoir accepté de présider mon jury.

Je voudrais également remercier tous les collègues de travail que j'ai côtoyés à l'INRIA Rhône-Alpes pendant cinq ans. Je pense en particulier à mes co-bureau, Jean, Marc, Laurent et Julien, pour leur gentillesse et leur bonne humeur constante, aux "anciens" thésards d'*i*MAGIS, Franck, Stéphane, les deux Sylvain et Caro, pour tous les bons moments passés ensemble, à notre voisin de bureau Fabrice, pour les discussions philosophiques en tous genres, et de manière générale à l'ensemble des chercheurs, permanents, thésards et stagiaires des équipes EVASION et ARTIS, tous passionnés de recherche en informatique graphique. Un grand merci à Anne Pierson qui nous supporte au quotidien, et dont le sens du service est tout simplement inestimable.

Je tiens enfin à remercier ma famille, mes amis, et bien sûr Nico, pour leur soutien, leur patience et leur amour.

SOMMAIRE

Introduction **7**

Notations **15**

I État de l'art **17**

1 Cheveux : du réel au numérique **19**

2 Modèles pour la simulation physique **63**

II Simulation interactive de chevelures **77**

3 Modèle adaptatif de chevelure pour l'animation **81**

4 Représentation volumique de la chevelure pour le rendu **97**

III Simulation réaliste de chevelures **111**

5 Tige de Kirchhoff et modèle de Super-Hélice **115**

6 Simulation statique de chevelures **133**

7 Simulation dynamique de chevelures **151**

Conclusion **173**

A Courbes gauches et trièdre de Frenet **179**

B Elastica d'Euler **181**

C Modèle Lagrangien à nombre de degrés de liberté réduit **183**

D Processus de reconstruction d'une Super-Hélice **193**

Table des matières **197**

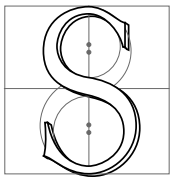
Table des figures **201**

Bibliographie **211**

Introduction

Cheveux bleus, pavillon de ténèbres tendues, vous
me rendez l'azur du ciel immense et rond.

CHARLES BAUDELAIRE
La Chevelure



I L'ANIMATION de personnages virtuels a bénéficié de nettes avancées ces vingt dernières années, la simulation par ordinateur de cheveux demeure en soi un domaine de recherche scientifique difficile et encore assez peu exploré, que ce soit dans le domaine de l'informatique graphique, de la physique ou de la mécanique. La difficulté provient avant tout de la complexité structurelle d'une chevelure. En effet, une chevelure humaine est un matériau composite constitué d'environ 100 000 cheveux en interaction les uns avec les autres, chaque cheveu se présentant comme une tige translucide très fine et recouverte d'écailles. D'autre part, l'étude scientifique de ce matériau si particulier a longtemps été laissée de côté, du fait de l'absence d'enjeux économiques.

De nos jours, étant donnée la multiplication des personnages virtuels dans les jeux vidéo et les films d'animation, la simulation de cheveux fait l'objet d'un intérêt croissant de la part des spécialistes de l'informatique graphique. Par ailleurs, la simulation physique de cheveux attire de plus en plus l'attention des cosmétologues spécialistes du cheveu, qui voient dans le prototypage virtuel un moyen efficace pour mettre au point des produits capillaires.

1 Motivations et enjeux

Plus qu'un simple détail de l'apparence humaine, la chevelure est en réalité un élément visuel - et tactile - essentiel de la personne. Célébrés de tous temps dans l'art pictural et dans la littérature, les cheveux sont le reflet d'une mode, d'une tradition ou d'une personnalité, et ils font de nos jours l'objet de soins attentifs. Dans les environnements virtuels peuplés de personnages de synthèse, la représentation et l'animation de cheveux sont donc essentielles si l'on souhaite générer des scènes réalistes. Cependant, la simulation de chevelures a longtemps résisté aux spécialistes de l'informatique graphique, et l'on commence tout juste à percevoir, depuis 2001, quelques solutions à ce difficile problème scientifique.

Cheveux, art et histoire

"La beauté du ciel est dans les étoiles, la beauté des femmes est dans leur chevelure", selon un proverbe italien. Depuis toujours, la beauté étrange des cheveux fascine en effet les Hommes et inspire les artistes, qu'ils soient peintres de l'antiquité, poètes du XIX^{e} siècle - Baudelaire dédia l'un de ses poèmes à la sensualité de la chevelure - ou même dessinateurs de mangas japonais ! Les beaux cheveux séduisent d'abord par leur brillance et leur toucher soyeux, mais également par la grâce avec laquelle ils peuvent flotter dans l'air lorsqu'ils sont mis en mouvement (voir Figure 1). Epars, ils sont souvent comparés à l'eau qui ondule et coule sur les épaules ; les artistes y voient aussi la séduction de la femme, le désir ou le mal - incarnés par les Gorgones et les Erinyes, ces monstres et divinités antiques infernaux aux cheveux de serpent - tandis que leur blondeur rime avec innocence et douceur...

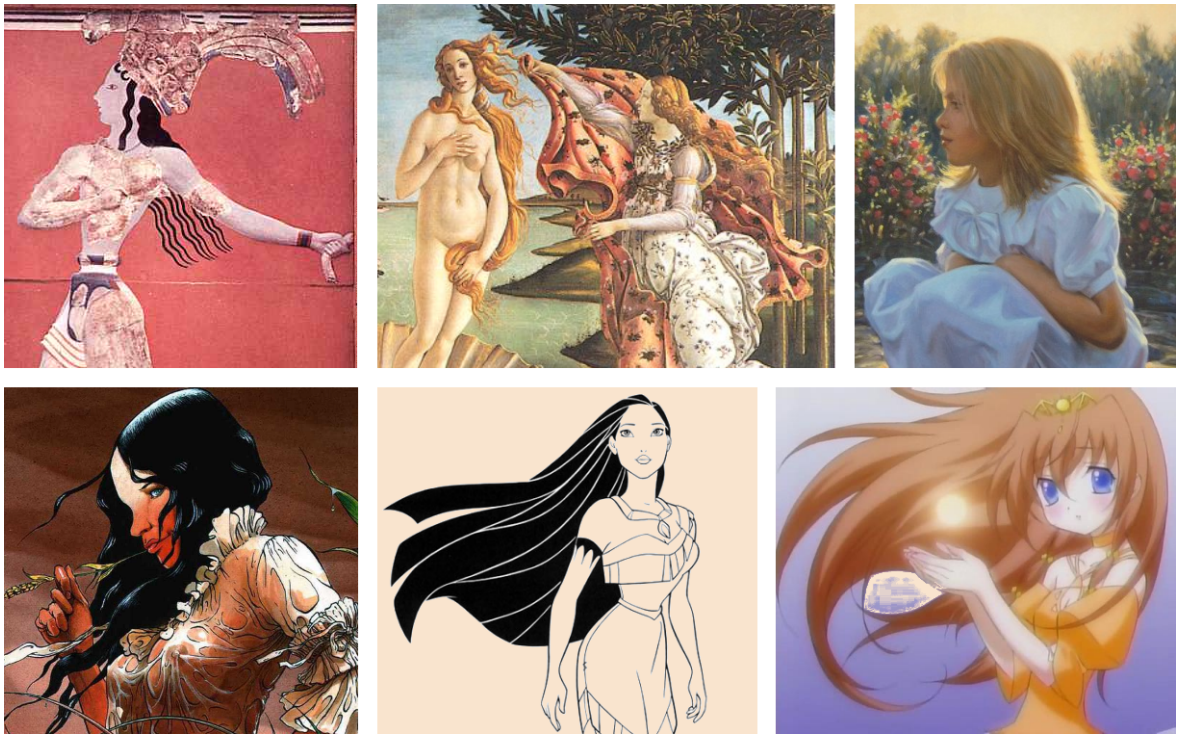


FIG. 1: *Célébration de la chevelure humaine à travers les époques, dans la peinture et le dessin. De gauche à droite et de haut en bas : 1) "le prince aux fleurs de Lys", fresque crétoise datant de 1500 ans av. J.C. 2) Détail de "la naissance de Vénus" de Boticelli, peinture sur toile (1485). 3) "Cheveux d'or", d'Emmanuel Garant, huile sur toile (années 90). 4) Extrait de la bande dessinée "Les passagers du vent" de Bourgeon (années 80). 5) Dessin de "Pocahontas" extrait du dessin animé des studios Walt Disney (1995). 6) Ichika, personnage du manga japonais animé Uta Kata (années 2000).*

Outre leur côté poétique, romantique ou même sensuel, les cheveux sont depuis des millénaires symbole de dignité, vigueur et énergie dans de nombreuses civilisations : comme Dalila, la Philistine traîtresse qui coupa les sept tresses de Samson, c'est pour s'emparer de la force de l'adversaire que les Indiens d'Amérique ôtaient le scalp de leur ennemi. Dans de nombreuses sociétés, la chevelure coupée représente également une extension immortelle de la personne : à l'époque où les portraits étaient rares, les amants s'échangeaient des mèches de cheveux en bijoux, et dans les sociétés chrétiennes du XIX^{e} siècle - ou encore aujourd'hui chez certains peuples africains - les cheveux coupés étaient conservés après la mort sous forme de reliques ou objets commémoratifs.

Bien plus qu'un objet mythique célébré dans la peinture ou dans la poésie, la chevelure (et la manière de la porter) exprime aussi une époque, des signes ritualisés, une mode voire des idées politiques (voir Figure 2).



FIG. 2: *La chevelure comme témoin de la société. De gauche à droite : 1) Perruque du XVI^{e} siècle (peinture Versailles). 2) La coupe à la garçonne, mise à la mode par Louise Brooks en 1929, et signe précurseur du mouvement féministe. 3) Le blond platine, couleur de star et éternel symbole de séduction chez la femme. 4) Cheveux longs des hippies dans les années 70. 5) De nos jours, la mode du crâne rasé sévit chez les sportifs et certains acteurs masculins (comme ici Brad Pitt, dans Ocean 12).*

Le lecteur intéressé trouvera dans [AMB01] l'ensemble des mythes et traditions relatifs au sacré de la chevelure, ainsi que les différentes modes et coutumes concernant la manière de se coiffer, à travers les âges et les civilisations.

La coiffure comme reflet de la personnalité

Témoin d'une époque, d'une civilisation ou d'une mode, la chevelure est devenue dans les sociétés modernes, avec le développement de la cosmétique, l'objet de tous les soins. La couleur des cheveux, leur forme, ou encore le style de coupe adopté sont autant d'éléments importants de notre physique qui influent dans la vie de tous les jours sur la perception qu'ont les autres de nous-mêmes et de notre personnalité.



FIG. 3: *Impact d'une coiffure sur l'apparence globale d'un visage (©Stellure Studio).*

C'est du moins ce qu'en a conclu une étude récente intitulée "First Impressions and Hair Impressions" [1], menée par Marianne LaFrance, professeur de psychologie à l'Université Yale, qui révèle que des jugements sont portés sur la personne dès les premières secondes d'une rencontre, et que l'impression laissée repose en grande partie sur le style de coiffure. Il en ressort que la chevelure a en fait plus d'impact que les traits du visage. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la Figure 3. Il est étonnant de constater à quel point l'encadrement d'un même visage par différentes coiffures

[1] Les résultats de cette étude sont communiqués à l'adresse http ://www.physique.com/ca_fre/sn/sn_yale-study2.asp.

donne l'illusion d'avoir affaire à des personnes différentes, et dont on peut, au premier coup d'oeil, se faire une idée *a priori* de la personnalité (naturelle, séductrice, réservée, rebelle, etc.). Une autre étude menée par Marianne Lafrance, appelée "Bad Hair Days" montre que le soin que l'on apporte à ses cheveux a une influence sur l'estime de soi, les performances individuelles, et le bien-être en général [2]. Forts des résultats de ces études qui donnent de l'importance à la chevelure et au soin qu'on veut bien lui accorder, les premiers studios d'essayage virtuel de coiffures - souvent, des portails de fabricants cosmétiques - commencent à faire leur apparition sur le Web [3].

Un thème de recherche en plein essor en graphique

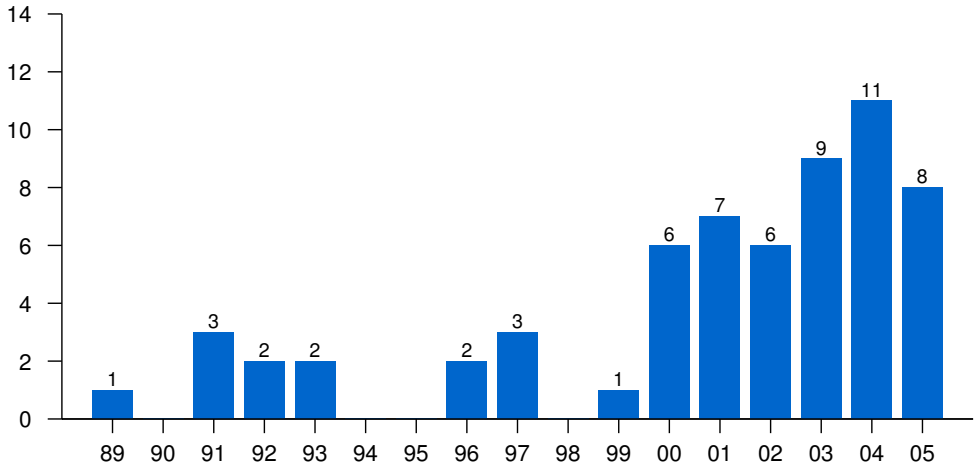


FIG. 4: *Nombre de publications sur la synthèse de cheveux en informatique graphique, par an.*

Avec l'augmentation spectaculaire de la puissance des ordinateurs ces dernières années, les spécialistes de l'informatique graphique ont enfin pu s'attaquer à la synthèse de chevelures en graphique, jugée irréalisable auparavant. Comme le témoigne la Figure 4, la recherche académique dans le domaine a commencé à la fin des années 80, et s'est réellement développée dans les années 90. Depuis 2000, on assiste à un véritable engouement pour la simulation de cheveux, avec quasiment chaque année un nombre croissant de publications en informatique graphique sur le sujet.

Parallèlement, les sociétés produisant des logiciels de modélisation 3D investissent de plus en plus dans la conception d'outils permettant la modélisation de coiffures virtuelles et l'animation de cheveux. Parmi les logiciels les plus connus, citons 3DS MAX (Shag Hair), MAYA, XSI, Poser, Cinema4d. Tous ces logiciels intègrent depuis peu (années 2000) des outils permettant la coiffure et l'animation de cheveux.

Les studios d'animation 3D s'attaquent également de plus en plus à l'animation de longs cheveux, en développant souvent leurs propres outils de simulation. Après les fameuses scènes de cheveux sous le vent de *Final Fantasy* en 2000, qui ont marqué le début des investissements des studios d'animation dans la simulation de cheveux, on a pu découvrir récemment, sur les grands écrans, des films comme *Les Indestructibles* de Pixar ou *Shrek* de Dreamworks, rivalisant de techniques pour animer et rendre des longs cheveux de la manière la plus réaliste possible (voir Figure 5). Si le rendu de cheveux a aujourd'hui atteint un réalisme pratiquement parfait dans l'industrie du cinéma, il n'en est cependant pas

[2] Pour plus de détails, voir http ://test.oxfordhair.org/news/pressroomstory/37.htm.

[3] Voir par exemple http ://www.stellure.com.

de même pour l'animation de cheveux. De tous les témoignages portant sur la fabrication de ces films, il ressort toujours que l'animation des cheveux des personnages est l'une des tâches les plus difficiles à réaliser. Dans *Final Fantasy*, la simulation des 60 000 cheveux individuels du personnage principal avait mobilisé 20% du temps de calcul total de la production [Squ00]. Les réalisateurs des *Indestructibles* racontent que la scène dans laquelle Violet - le seul personnage aux cheveux longs du film - se fait consoler par sa mère qui lui passe une mèche de cheveux derrière les oreilles, a soulevé d'importantes difficultés liées à la gestion des collisions entre la chevelure et la main du personnage [Pix04b]. Notons d'ailleurs que dans l'une des premières scènes du film, qui montre le principal protagoniste en train de se passer la main dans les cheveux, les collisions main/cheveu ne sont même pas du tout traitées, entraînant des interpénétrations assez visibles [Pix04a]. En réalité, dans les films d'animations, les cheveux sont souvent animés de manière semi-automatique, en combinant la simulation purement physique au contrôle de l'animateur et à la retouche manuelle [Pix04b].

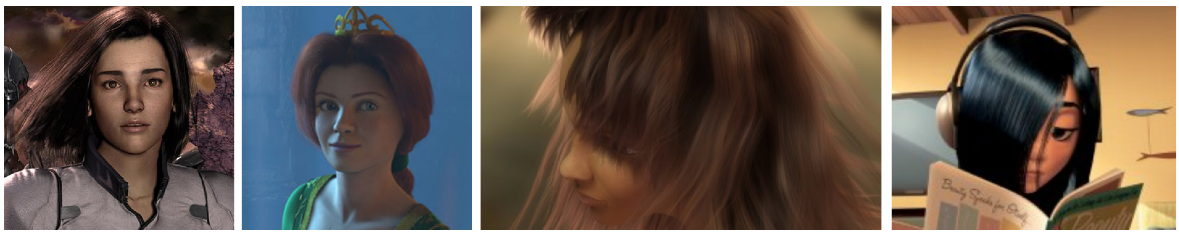


FIG. 5: *Chevelures de synthèse apparues récemment sur les grands écrans. De gauche à droite : extraits de Final Fantasy (2000), Shrek (2001), Kaena, la prophétie (2003), les Indestructibles (2005).*

Simulation pour la science capillaire

Les scientifiques ont longtemps négligé l'étude des cheveux, car, contrairement aux disciplines portant sur les autres organes humains (domaine cardio-vasculaire par exemple), le domaine du cheveu ne concerne aucune pathologie vitale ; il ne paraissait donc pas utile de s'y intéresser d'un point de vue scientifique. Ce n'est qu'au début du XX^{e}siècle que la science capillaire a commencé à se développer, grâce aux progrès de la chimie et de la biologie. Dans les sociétés modernes où l'importance est de plus en plus accordée à l'esthétique et à l'image de soi, la cosmétologie a alors pris son essor, et aujourd'hui la science capillaire fait l'objet d'une recherche de pointe, réunissant des spécialistes de toutes disciplines qui étudient les propriétés chimiques, biologiques et mécaniques des cheveux et conçoivent des produits pour le soin et la beauté de la chevelure.

Leader dans le domaine, la société L'Oréal investit considérablement dans la recherche et contribue à faire sans cesse reculer les limites des connaissances scientifiques. De plus en plus intéressés par les technologies numériques, la simulation informatique et la visualisation, les chercheurs spécialistes du cheveu à L'Oréal ont contacté notre équipe de recherche en informatique graphique EVASION fin 2002, et c'est en juin 2003 que nous avons eu la chance de démarrer une collaboration ensemble, qui s'est étendue jusqu'à juin 2006.

2 Cadre de la thèse et objectifs

Cette thèse attaque deux grandes difficultés antagonistes liées à la simulation de chevelures, et plus particulièrement à l'animation de cheveux : d'une part, la réduction du coût de calcul nécessaire à l'animation et au rendu d'une chevelure complète, et d'autre part, le réalisme de son mouvement. Dans un premier temps, nous avons mis en place de nouveaux algorithmes visant à réduire les coûts

de calcul liés l'animation d'une chevelure complète, dans le but de parvenir à des temps de calcul *interactifs*. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés, dans la majeure partie de cette thèse, au développement et à la validation d'un modèle *réaliste* de chevelure pour la modélisation de coiffure et l'animation. Ce second travail a été mené en collaboration avec Basile Audoly, chercheur au CNRS en modélisation mécanique, et avec les laboratoires de recherche de L'Oréal.

Simulation interactive de cheveux

Lorsque cette thèse a commencé, quelques méthodes d'animation de cheveux avaient déjà été proposées, donnant de bons résultats visuels. Cependant, les temps de calcul en jeu, à la fois pour le calcul de la dynamique et pour le rendu des images finales, étaient trop lourds pour que ces méthodes puissent être utilisées dans le cadre d'applications temps-réel comme le jeu vidéo par exemple. Dans ce contexte, notre objectif était de trouver des algorithmes permettant :

- D'accélérer ces méthodes d'animation, en explorant pour la première fois la simulation adaptative de chevelures.
- De rendre des séquences animées de chevelure de manière efficace, en exploitant la structure cohérente de la chevelure au cours du temps.
- De simplifier la gestion des interactions entre cheveux, celle-ci représentant classiquement l'une des tâches les plus coûteuses dans la simulation de cheveux.

Simulation réaliste de cheveux

J'ai eu la chance de travailler pendant la majeure partie de ma thèse en étroite collaboration avec Basile Audoly, spécialiste en modélisation mécanique, ainsi qu'avec plusieurs chercheurs du Département de recherche avancée de L'Oréal. L'objectif de cette collaboration très pluridisciplinaire, regroupant des compétences en mécanique, en modélisation physique, en simulation numérique, en cosmétologie et en informatique graphique, a consisté en la modélisation *physiquement* réaliste (et plus seulement visuellement réaliste) de cheveux pour la simulation statique et l'animation dynamique.

Au début de la collaboration, la conception d'un modèle mécanique rigoureux de cheveu unique dynamique a été confiée à Basile Audoly. Pour ma part, l'objectif était de participer à l'implémentation de ce modèle dans le cadre d'une application graphique et de tester ses possibilités, avant de l'étendre à l'échelle de la mèche, puis de la chevelure complète. L'une des principales difficultés était alors la prise en compte de l'ensemble des interactions mises en jeu au cours de la simulation. Notre but était de parvenir à un modèle physiquement réaliste de chevelure, ayant les propriétés suivantes :

- Le modèle physique devait permettre de générer le plus grand nombre d'effets typiques des cheveux, tout en étant paramétré par un jeu réduit de paramètres ayant une signification physique ou géométrique claire pour l'utilisateur. Conçu suffisamment en amont, il devait être capable aussi de prédire de manière réaliste le comportement d'une chevelure lorsque tel ou tel paramètre physique serait modifié.
- Le modèle devait rendre compte au mieux de la diversité des types de cheveux existant dans le monde réel. Notamment, on souhaitait parvenir à un modèle unique permettant de générer et d'animer des cheveux d'origines ethniques variées, qu'ils soient lisses, ondulés, bouclés ou crépus. Nous nous sommes limités, dans notre étude, à la simulation de chevelures naturelles (*i.e.* non traitées chimiquement ni modelées en coiffures compliquées...).
- Même si l'on ne s'est pas imposé ici la contrainte de temps-réel, nous souhaitions tout de même que les calculs s'effectuent en des temps raisonnables (quelques minutes au maximum par pas de simulation).

3 Organisation du document

Ce mémoire est divisé en sept chapitres regroupés en trois parties.

La première partie s'attache tout d'abord, au Chapitre 1, à présenter l'objet naturel que l'on cherche à modéliser ici, le cheveu, avant de dresser un état de l'art sur les différentes approches proposées jusqu'à aujourd'hui en informatique graphique pour modéliser, animer et rendre des chevelures. Étant donné que la plus grande partie du travail réalisé au cours de cette thèse porte sur la simulation physique de chevelure, nous recensons au Chapitre 2 l'ensemble des méthodes développées en informatique graphique pour la simulation d'objets par modèles physiques.

La seconde partie présente mes contributions à la conception d'algorithmes efficaces pour l'animation et le rendu de cheveux dans un contexte d'application interactive. Le Chapitre 3 explore la simulation adaptative pour proposer un modèle d'animation efficace, capable de s'adapter automatiquement à la complexité du mouvement de la chevelure à chaque instant. Le Chapitre 4 exploite quant-à-lui une représentation volumique de la chevelure en mouvement, de manière à calculer très rapidement les interactions à la fois lumineuses et mécaniques entre les cheveux.

Enfin, la troisième et dernière partie présente les recherches menées autour de la simulation physiquement réaliste de cheveux, dans le cadre de la collaboration évoquée précédemment. Le cœur de la modélisation des cheveux repose sur le modèle de tige de Kirchhoff, que nous décrivons au Chapitre 5, et dont nous proposons une version discrétisée, appelée modèle de *Super-Hélice*. Nous appliquons ce modèle discret de tige physique à la génération de coiffures statiques réalistes, au Chapitre 6, avant de proposer, au Chapitre 7, une extension de ce modèle dans le cas dynamique.

Nous dressons en conclusion un bilan de ces travaux, et mentionnons un certain nombre de pistes envisageables pour la suite de ces recherches.

Notations

Scalaires, vecteurs et matrices

Pour plus de clarté dans les équations, nous prendrons les conventions suivantes. Les grandeurs scalaires seront notées en italique (s), les vecteurs de dimension n, $n > 1$ en gras ($\mathbf{v}$), et les matrices par des lettres doubles ($\mathbb{M}$), $\mathbb{I}$ désignant la matrice identité. La i^{e}composante scalaire d'un vecteur $\mathbf{v}$ sera notée v_i ou $(\mathbf{v})_i$.

Algèbre

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	Produit scalaire entre les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$	Produit vectoriel entre les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$
${}^{\mathrm{t}}\mathbf{v}$ (resp. ${}^{\mathrm{t}}\mathbb{M}$)	Transposée du vecteur $\mathbf{v}$ (resp. de la matrice $\mathbb{M}$)

Opérateurs différentiels

Soit f une fonction scalaire des variables $x_1, \cdots, x_n$.

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}$	Dérivée totale de la fonction f par rapport à la variable x_i (toutes les autres variables supposées dépendantes de la variable x_i)
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i (toutes les autres variables supposées fixes)
$\mathbf{grad}\, f$	Opérateur gradient, $(\mathbf{grad}\, f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou $\dot{f}$	la dérivée temporelle de f

Grandeurs mécaniques

Les grandeurs homogènes à une énergie seront notées à l'aide de lettres calligraphiques ($\mathcal{U}$).

$\mathbf{g}$	Vecteur gravité
ρ	Masse volumique
E	Module d'élasticité (module d'Young)
μ	Module de cisaillement
ν	Coefficient de Poisson

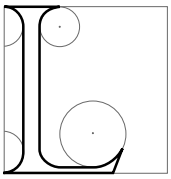
Première partie

État de l’art

CHAPITRE 1

Cheveux : du réel au numérique

> Allons chercher nos images dans l'oeuvre de ceux qui ont le plus longuement rêvé et valorisé la matière : adressons-nous aux alchimistes.
>
> GASTON BACHELARD
> *L'air et les Songes*



ES CHEVEUX intéressent, intriguent ou passionnent de nos jours un grand nombre de scientifiques spécialisés dans des domaines très divers. Si les biologistes, chimistes ou physiciens cherchent à comprendre la nature et les propriétés fondamentales des cheveux, les cosmétologues mettent au point des produits pour les embellir ou modifier leur apparence, tandis que les informaticiens en graphique tentent de simuler leur comportement de manière réaliste ou en temps-réel.

Grâce à la richesse des collaborations menées au cours de cette thèse, avec des concepteurs de jeux vidéo, des physiciens ou encore des cosmétologues, nous avons pu explorer divers domaines dans lesquels le cheveu est étudié de près, et ainsi acquérir une vision assez large sur cet objet naturel, pour finalement découvrir les multiples facettes de la recherche scientifique dont il est au cœur.

Cet état de l'art s'attache dans un premier temps à décrire les propriétés structurelles et physiques du cheveu. Nous abordons ensuite le domaine de la cosmétologie, avant de passer en revue les précédents modèles numériques de cheveux développés en informatique graphique, soit dans un but de réalisme, soit dans le cadre d'applications temps-réel. Cet élargissement des vues est selon nous indispensable pour bien mettre en évidence le cadre très pluridisciplinaire dans lequel se place cette thèse, et pour montrer comment les différents domaines abordés peuvent se compléter, et concourir à remplir les objectifs que nous nous sommes fixés.

1 La nature des cheveux

Selon le dictionnaire (le Petit Larousse), le mot *cheveu* est défini comme tel :

Cheveu *n. m. XI^e siècle. Du latin capillus, « cheveu ». Poil qui pousse sur le crâne de l'homme.*

Si le poil est une structure caractéristique des mammifères, essentiellement destinée à protéger du froid ou de la chaleur, le cheveu est bien propre à l'espèce humaine. En effet, contrairement au poil des animaux, le cheveu humain ne comporte pas ou peu de mœlle, responsable de la thermorégulation de l'organisme de l'animal grâce à ses capacités isolantes. La chevelure est-elle apparue en raison de la stature verticale de l'homme, ou bien comme une protection naturelle et nécessaire du crâne humain ? En réalité, les raisons et le rôle biologiques exacts de la chevelure humaine demeurent encore inconnus de nos jours.

Nous ne décrirons pas ici de manière exhaustive toutes les propriétés physiques, biologiques et chimiques des cheveux, mais seulement celles qui nous intéressent pour la simulation du rendu, de la forme statique et de la dynamique d'une chevelure. Nous invitons donc le lecteur intéressé par davantage de détails à se référer aux sources complètes sur le sujet [Rob02, Gra97, AMB01, L'O05], dont s'inspire cet état de l'art.

1.1 Les différents types de cheveux dans le monde



FIG. 1.1: *Les trois grands types de cheveux dans le monde. De gauche à droite : cheveux asiatiques, cheveux caucasiens et cheveux africains. Pour chaque catégorie est donnée une vue transversale d'un cheveu (grossi environ 400 fois), une vue des cheveux en coupe, et l'implantation des cheveux sur le cuir chevelu (©L'Oréal).*

La forme naturelle des cheveux est très variable dans le monde, en fonction des individus et de leurs origines ethniques : le cheveu peut être naturellement raide, ondulé, bouclé, frisé ou crépu, tandis que sa section, plus ou moins elliptique, a un diamètre moyen pouvant être compris entre 45 et 100 microns. Ces différences varient de manière relativement continue entre les différents peuples de la planète, mais l'on peut cependant distinguer schématiquement trois grandes catégories de types de cheveux dans le monde [AMB01] : les cheveux asiatiques, africains, et caucasiens.

- Les cheveux *asiatiques* sont gros, réguliers, de section pratiquement ronde, généralement droits. Ils sont implantés perpendiculairement sur le dessus de la tête. Leur couleur est noire.
- Les cheveux *africains* sont irréguliers, très frisés et vrillés. Leur section est très elliptique, et ils poussent quasiment de manière parallèle au cuir chevelu. Leur couleur est essentiellement noire.
- Les cheveux *caucasiens* représentent l'intermédiaire entre les deux catégories précédentes. Présents majoritairement chez les descendants des ancêtres européens (Europe, Amérique du Nord, etc.), ils peuvent avoir une forme très variable, allant de raide à très frisée. Leur section est une ellipse plus ou moins accentuée, et ils sont implantés de manière oblique par rapport au cuir chevelu. Leur couleur est également très variable, puisqu'ils peuvent prendre toutes les teintes

allant du blond très pâle jusqu'au noir profond.

La Figure 1.1 et le Tableau 1.1 illustrent ces propriétés et fournissent des éléments supplémentaires de comparaison entre ces trois types de cheveux, tirés de [AMB01] et [Hrd73].

	Asiatique	**Caucasien**	**Africain**
Diamètre moyen (μm)	95	80	76
Nombre moyen d'écailles par mm	31	29	35
Présence de vrilles localisées (discontinuités en courbure)	aucune	aucune	oui
Courbure géométrique moyenne (cm^{-1})	0,05	0,2	7
Régularité de frisure	parfaite	variable	très irrégulière
Torsion	aucune	peu	beaucoup
Rapport moyen entre la longueur réelle du cheveu et sa longueur apparente	1	1,2	3

TAB. 1.1: *Quelques propriétés géométriques du cheveu, en fonction du groupe ethnique d'appartenance [Hrd73, FHB+03].*

Les scientifiques ont remarqué qu'il existait une forte corrélation entre la frisure, le diamètre et l'ellipticité d'un cheveu : les gros cheveux (de type japonais par exemple) ne sont jamais bouclés à l'état naturel ; les cheveux bouclés ont quant-à-eux, généralement, une section elliptique, mais les cheveux les plus frisés ne sont pas nécessairement ceux qui ont la section la plus elliptique [Hrd73].

Au vu de leurs mesures sur le cheveu dans les différentes populations du monde, les anthropologues et les cosmétologues répertorient et classent les différents types de cheveux de manière beaucoup plus fine que par les seuls groupes asiatique, caucasien et africain que nous avons présentés [Hrd73, SKHK95]. Toutefois, dans le cadre de notre étude, la classification du type de cheveu selon ces trois grands groupes ethniques sera suffisante.

1.2 Répartition des cheveux sur le crâne

Densité capillaire

Une chevelure humaine est composée, en moyenne, de 100 000 à 150 000 cheveux implantés seuls ou par groupes de deux ou trois dans le cuir chevelu. Le nombre total de cheveux sur une tête dépend de plusieurs facteurs : le diamètre et la couleur du cheveu, l'origine ethnique, l'âge de la personne et la prédisposition génétique à perdre ou non ses cheveux prématurément. La densité capillaire (en moyenne 200 à 300 cheveux par centimètre carré) est donc variable d'une personne à l'autre, mais aussi d'une région du cuir chevelu à l'autre chez un même individu (en général, la densité capillaire est plus forte sur le dessus du crâne que près des tempes).

Motifs capillaires

Chez les personnes de groupe caucasien présentant des cheveux raides et courts, il est courant de remarquer des motifs formés par la chevelure. Ces motifs capillaires sont dus au fait que, contrairement au cheveu asiatique qui pousse droit sur la tête, le cheveu caucasien pousse de manière oblique par rapport au cuir chevelu. Dans le cas de cheveux courts et lisses, le plan et l'angle d'implantation du cheveu déterminent la direction du cheveu sur le crâne. Parfois, ces directions d'implantation peuvent varier assez fortement sur un même cuir chevelu, d'où l'apparition de *motifs capillaires* (notons que les cheveu africain sont trop frisés pour pouvoir présenter de tels motifs). On observe ainsi

assez souvent sur les cheveux coiffés en brosse des motifs en forme de spirale issue d'un point central situé près du vertex (sommet du crâne). En général, ces spirales tournent dans le sens des aiguilles d'une montre [Gra97]. La Figure 1.2 illustre ce phénomène, bien connu des coiffeurs, car dans certains cas il provoque l'apparition de mèches rebelles, et rend alors la chevelure très difficile à coiffer. Les scientifiques auraient récemment découvert qu'un gène pourrait être responsable de la présence ou non de motifs capillaires[1].



FIG. 1.2: *Motifs capillaires. De gauche à droite : 1) Motifs en forme de spirale issue du vertex, chez un jeune enfant. 2) Mêmes motifs sur des cheveux plus longs (©J. Gray). 3) Motifs sur le front, causant l'apparition d'une mèche rebelle.*

1.3 Structure d'un cheveu

Le cheveu est composé de deux parties principales : la *tige*, seule partie visible (et morte) du cheveu, et la racine, appelée *follicule pilleux*, partie vivante du cheveu encastrée profondément (4 mm) dans le cuir chevelu. Le follicule pileux est le siège d'une intense activité biochimique et métabolique qui conduit au développement et à la croissance de la tige pilaire. En effet, contrairement aux végétaux, la pousse du cheveu s'effectue par sa base.

Le follicule pileux, synthétiseur de kératine

La Figure 1.3 illustre un follicule pileux vu en coupe. La papille dermique, située à la base du follicule pileux, régit les cycles de croissance du cheveu ainsi que les dimensions du follicule et de la tige pilaire. Le bulbe pilaire est la zone de prolifération du follicule pileux. Au fond de ce bulbe se trouvent deux types de cellules : les kératinocytes et les mélanocytes. Ces derniers vont synthétiser le pigment, appelé *mélanine* et le transférer à la tige pilaire qui va pousser pigmentée. La tige pilaire est ainsi formée au centre du follicule pileux par maturation des kératinocytes qui vont très rapidement synthétiser les kératines et se durcir, perdre leur activité biologique et mourir. Une fois arrivée au niveau du canal sébacé, la tige est libérée des gaines qui l'ont étroitement enserrée, et sort ensuite du cuir chevelu. Les glandes sébacées, chargées d'une substance grasse appelée sébum, ont pour rôle de lubrifier naturellement le cheveu à sa sortie du cuir chevelu. Chez l'homme comme chez la femme, la sécrétion de sébum dépend fortement de la quantité d'hormones sexuelles mâles produites. Une hyper-activité des glandes sébacées provoque le phénomène connu sous le nom de "cheveux gras".

La tige pilaire, partie visible et inerte du cheveu

La tige, ou fibre capillaire, est un long tube plein de section elliptique, essentiellement constitué par une protéine fibreuse, insoluble et très résistante, la *kératine*. La tige se compose de trois couches

[1] Voir l'article à l'adresse http ://news.bbc.co.uk/1/hi/health/3745979.stm.

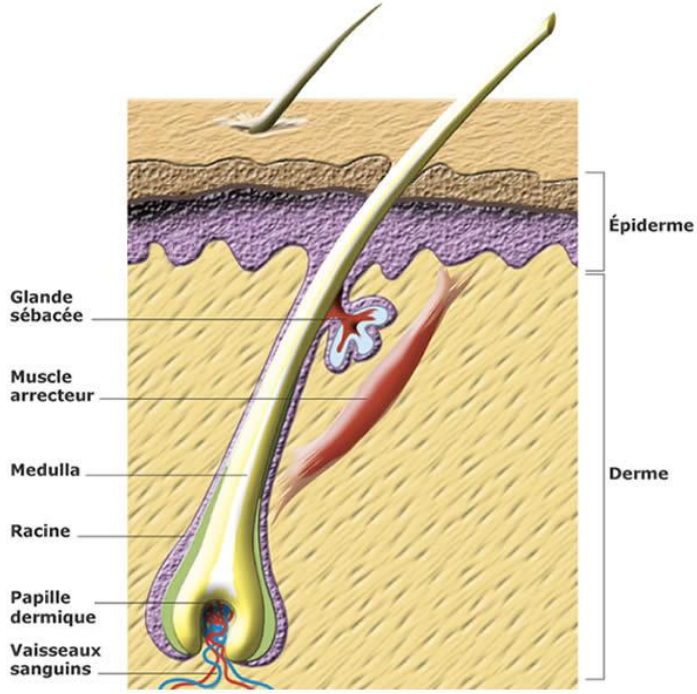


FIG. 1.3: *Schéma d'un follicule pilo-sébacé (©Idé pour I-marginal).*

concentriques, qui sont, depuis l'intérieur vers l'extérieur :

- La mœlle, appelée aussi *canal médullaire* ou encore *medulla*, colonne centrale, intermittente voire absente, peu ou pas pigmentée, dont le rôle précis chez l'Homme reste encore inconnu (chez l'animal, le canal médullaire présente une structure alvéolée responsable des propriétés de thermorégulation des poils).
- Le cortex, véritable corps de la fibre, représentant 90 % de son poids total. Formé de cellules remplies de kératine, le cortex confère à la fibre des propriétés physiques et mécaniques remarquables. C'est également dans le cortex que l'on trouve les grains de mélanine, responsables de la couleur des cheveux.
- La *cuticule*, l'enveloppe protectrice du cheveu, composée de cellules cornées non pigmentées appelées *écailles*. Ce sont des cellules plates rectangulaires, disposées sur la tige à la manière des tuiles d'un toit avec des recouvrements multiples. Leur bord libre est orienté vers la pointe du cheveu (voir Figure 1.4). Notons que c'est du bon état de la cuticule que vont dépendre les qualités de brillance, de douceur, de facilité de peignage ou de démêlage des cheveux.

Il faut bien noter que la fibre capillaire est définitivement construite : une fois formée, elle ne reçoit plus aucun apport des tissus vivants qui l'ont fabriquée. Exposée au soleil, à l'humidité, à la pollution, etc., elle subit continuellement des agressions extérieures, et vieillit donc comme s'use un matériau (voir Figure 1.14).

De plus, la plupart des propriétés naturelles de la tige, géométriques ou mécaniques, sont acquises exclusivement à partir de la racine. En particulier, des chercheurs en cosmétologie ont montré que la frisure naturelle de la tige pilaire était programmée à partir du bulbe pileux (et non à partir du derme). L'ellipticité du cheveu semble également être déterminée par la racine, et plus particulièrement par l'épaisseur des gaines entourant le follicule pileux : des chercheurs ont en effet observé que cette épaisseur n'était pas symétrique dans le cas de cheveux africains. La gaine externe étant plus épaisse sur la face concave de la courbure, elle exercerait alors une plus grande pression sur la tige en forma-

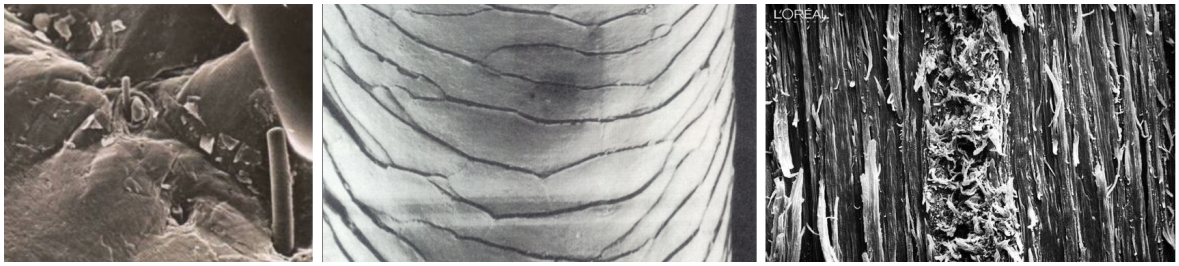


FIG. 1.4: *Structure du cheveu, observée au microscope électronique à balayage, à divers grossissements. De gauche à droite : 1) Pousse des cheveux sur le cuir chevelu (image extraite de [Gra97], grossissement* $\times 100$*). 2) Structure de la cuticule en écailles d'un cheveu, orientée comme sur l'image de gauche : la pointe est dirigée vers le haut (image extraite de [Rob02], grossissement* $\times 1000$*). 3) Vue en coupe du cortex et de la mælle (au centre) d'un cheveu (©L'Oréal, grossissement* $\times 1000$*).*

tion ; celle-ci, encore peu rigide et malléable à ce stade, adopterait alors une forme elliptique, qu'elle conserverait une fois rigidifiée[2]. On peut ainsi considérer, schématiquement, que la géométrie de la tige pilaire est formée par extrusion à partir de la racine, et qu'elle reste donc relativement constante le long de la tige. En réalité, cela est surtout vrai pour les cheveux réguliers du type asiatique. Chez les cheveux fortement elliptiques, de type africain par exemple, il a été observé que l'ellipticité n'était pas toujours homogène le long du cheveu. De plus, dans le cas de cheveux africains très crépus, des défauts morphologiques localisés, souvent appelés *vrilles*, ont été observés, et semblent provenir de variations brutales de la courbure de la tige. Ces défauts ne seront pas pris en compte dans notre modélisation physique précise du cheveu, décrite au Chapitre 5.

1.4 Croissance et cycle pilaire

Un cheveu pousse en moyenne d'environ 0,3 à 0,5 mm par jour, soit environ 1 à 1,5 cm par mois. Le cheveu ne croît pas de façon continue pendant toute la vie, mais par cycles successifs au cours desquels il pousse, régresse, tombe, puis repousse, et ce indépendamment des cheveux voisins ; c'est ce qu'on appelle le *cycle pilaire*, qui renouvelle le cheveu en trois phases successives :

- La phase de croissance, appelée *anagène*, durant laquelle le cheveu est fabriqué par le follicule pileux. La phase anagène dure en moyenne trois ans et concerne à tout moment environ 85 à 90 % des cheveux.
- La phase de régression, dite *catagène*, pendant laquelle le follicule pileux est au repos et ne fabrique plus de cheveu. Durant cette phase, la base de la tige prend la forme d'une massue, et l'ensemble du follicule pileux se rétracte vers la surface du cuir chevelu. La phase catagène dure en moyenne trois semaines.
- La phase de chute, dite *télogène*, caractérisée par l'absence totale d'activité cellulaire. Le cheveu encore en place est alors naturellement éliminé lors des brossages ou des shampooings. La phase télogène dure en moyenne trois mois, et concerne à tout moment environ 10 à 15 % des cheveux.

Après une latence de deux à cinq mois, à la suite d'un stimulus encore inconnu, le follicule pileux entre dans une nouvelle phase anagène, redescend dans sa position initiale, et produit un nouveau cheveu : un nouveau cycle commence (voir Figure 1.5).

A l'état normal, la chevelure s'allonge, car l'immense majorité des cheveux est en phase de croissance ; de plus elle garde une densité constante, ceci étant garanti par le fait que les cycles pilaires

[2]Source : article "Le secret des chevelures", http ://www.ledevoir.com/2003/10/04/37640.html ?248

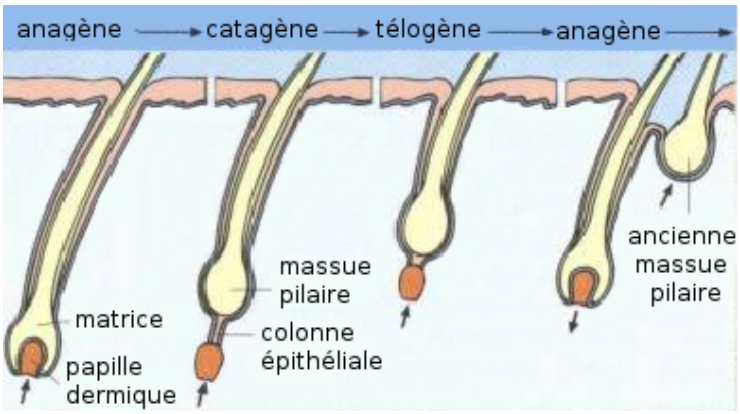


FIG. 1.5: *Les différentes phases du cycle pilaire (figure tirée de [Gra97]).*

associés à chaque follicule pileux se déroulent de manière indépendante, et donc totalement asynchrone.

Les follicules pileux sont programmés pour effectuer 20 à 30 cycles pilaires au cours d'une vie, mais il arrive que, pour des raisons hormonales, génétiques ou physiologiques, le processus se dérègle et entraîne la chute progressive des cheveux, phénomène appelé *alopécie*.

1.5 Propriétés physiques du cheveu

Nous présentons dans la suite quelques propriétés physiques du cheveu, qui nous seront utiles pour simuler le mouvement et l'apparence de cheveux à l'échelle macroscopique. Si l'étude des propriétés mécaniques du cheveu est essentielle pour pouvoir simuler ultérieurement la forme et le mouvement d'une chevelure, la connaissance des propriétés optiques du cheveu pourra s'avérer très utile pour reproduire les effets de lumière se produisant au sein d'une chevelure. L'action de l'eau sur les cheveux nous intéresse également pour être capable de simuler des situations courantes de cheveux mouillés (pluie, mouillage avant la coupe de cheveux, etc.).

Propriétés mécaniques du cheveu

Le Tableau 1.2 répertorie les paramètres mécaniques importants du cheveu.

Module d'élasticité (module d'Young)	0,1 - 3 GPa
Coefficient de Poisson	0,3 - 0,48
Masse volumique	1,3 $g \cdot cm^3$

TAB. 1.2: *Propriétés mécaniques du cheveu à sec.*

C'est principalement le cortex, constitué de kératine, qui confère à la tige pilaire ses propriétés mécaniques remarquables. Celles-ci sont le plus souvent évaluées par la technique d'*extensiométrie*, qui consiste à appliquer sur le cheveu une force de traction lente et régulière, de l'ordre de 1 cm par minute [AMB01]. En mesurant l'allongement du cheveu en fonction de la contrainte appliquée, et en notant l'instant de cassure, on en déduit la loi de déformation du cheveu, et sa résistance au chargement. Les courbes obtenues présentent une première zone quasi-linéaire correspondant à la déformation élastique du cheveu, suivie d'une zone de déformation plastique, jusqu'au point de rupture. Il faut noter que ces courbes, et en particulier l'endroit du point de rupture, dépendent fortement du groupe ethnique d'appartenance du cheveu : en effet, il faut appliquer une force de traction de 1000 N



FIG. 1.6: *Solidité remarquable du cheveu, conférée par les propriétés de la kératine. De gauche à droite : 1) Illustration du conte Rapunzel des frères Grimm, dans lequel une jeune fille enfermée au sommet d'une tour peut recevoir la visite de son bien-aimé grâce à sa longue chevelure blonde, qui sert de corde. 2) Publicité Garnier vantant la résistance des cheveux (©Garnier). 3) Mesure des propriétés mécaniques du cheveu par extensiométrie (©L'Oréal).*

environ pour casser un cheveu d'origine asiatique, qui s'allongera en moyenne de 55%, tandis qu'une force de 600 N suffira à casser un cheveu africain, qui ne s'allongera que de 40% en moyenne. Cela confirme bien la solidité du cheveu asiatique, et la fragilité du cheveu africain. Notons que le module de traction du cheveu constitue une bonne approximation de son module de flexion.

Dans le cadre de notre étude, où les cheveux seront uniquement soumis à leur propre poids et éventuellement à des forces relativement faibles imposées à leur racines, on pourra considérer que le cheveu, matériau très rigide, restera *inextensible* au cours du mouvement. Par contre, étant donnée sa section très fine, il sera soumis à d'importantes déformations en *flexion*, ainsi qu'à des déformations non négligeables en *torsion*.

En flexion, on peut remarquer qu'un cheveu atteint une limite à partir de laquelle il ne peut plus se plier. Il se produit alors une instabilité dans le comportement du cheveu : celui-ci sort brusquement du plan et tourne sur lui-même. Ceci est dû au fait qu'à partir d'un certain niveau de contrainte imposé en flexion, la configuration du cheveu en flexion pure possède une énergie potentielle plus grande que la configuration en torsion, qui "ramène" le cheveu dans une position plus naturelle, et "soulage" la déformation subie. Ceci explique également pourquoi les boucles naturelles de cheveu ne sont *jamais* planaires, et suivent plus ou moins la forme d'une anglaise (anglaise serrée pour les cheveux très bouclés, relâchée pour les cheveux dits "ondulés"). Notons que ce type d'expériences sur la flexion du cheveu peut être réalisé par soi-même, très simplement, sur un cheveu unique ou sur une mèche fine (voir Figure 1.8, à droite). Ce genre d'instabilité du cheveu sera à nouveau mis en évidence à travers les équations mécaniques de Kirchhoff pour les tiges, décrites au Chapitre 5, et dont on se servira pour construire le modèle physique réaliste de cheveu.

En ce qui concerne les propriétés de friction du cheveu, on peut noter que le frottement du cheveu est beaucoup plus important lorsqu'il y a déplacement dans le sens pointe-racine que dans le sens inverse, à cause de la présence des écailles. Malheureusement, très peu de données quantitatives sont connues à l'heure actuelle concernant le coefficient de frottement cheveu-cheveu, les mesures de ce paramètre restant très délicates.

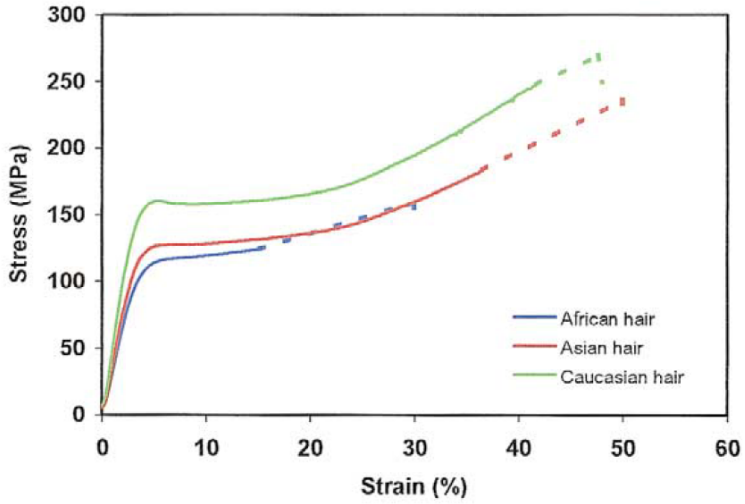


FIG. 1.7: *Contrainte exercée en traction sur le cheveu en fonction de sa déformation [FHB+03]. Trois courbes ont été obtenues, pour les trois types de cheveu : asiatique, caucasien et africain. Le cheveu asiatique montre une plus grande résistance à la traction que les autres cheveux, tandis que le cheveu africain, très fragile, présente un point de rupture très vite atteint, probablement à cause des vrilles localisées de ce type de cheveu. Le module d'Young du cheveu est la pente de la courbe en zone élastique linéaire. Le cheveu caucasien a en moyenne un module d'Young plus élevé que les deux autres groupes ethniques.*

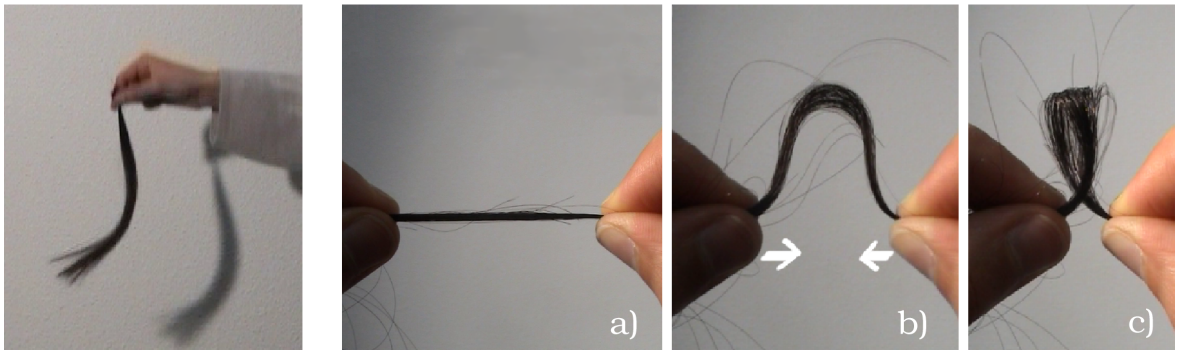


FIG. 1.8: *Mise en évidence du comportement non linéaire des cheveux. À gauche : flambage d'une mèche de cheveux par des oscillations verticales. À droite : mèche de cheveu soumise à deux forces opposées axiales croissantes (a), provoquant tout d'abord une instabilité en flexion (b) puis en torsion (c).*

Propriétés optiques

La composition et la structure microscopique des cheveux jouent un rôle prédominant vis-à-vis de leur apparence visuelle.

La fibre capillaire peut être considérée comme un milieu translucide, d'indice de réfraction constant égal à 1,55 [Rob02]. Comme nous l'avons vu précédemment, c'est le cortex de la fibre capillaire qui contient les grains de mélanine, responsables de la couleur des cheveux. Deux types de mélanine existent : la plus fréquente est l'eumélanine, qui colore les cheveux du blond au brun, en fonction de la quantité de pigments présents dans le cortex ; moins courante, la phæmélanine, de couleur jaune ou rouge, se trouve en majorité chez les roux. Ces pigments absorbent la lumière réfractée à travers le cheveu, et donc plus un cheveu est pigmenté, plus la quantité de lumière absorbée est importante.

La structure particulière de la surface du cheveu, composée d'écailles qui se recouvrent partiellement, a une influence très importante sur la manière dont le cheveu interagit avec la lumière. Comme pour un cylindre semi-transparent, une portion de la lumière se réfléchit directement sur la surface de la fibre (réflexion spéculaire, de la couleur de la lumière), tandis qu'une autre pénètre par réfraction à l'intérieur de la fibre où elle est absorbée, puis restituée en partie vers l'extérieur (réflexion diffuse, colorée par les pigments de la fibre). Mais à la différence du cylindre parfait, la présence des écailles sur la surface de la fibre dévie légèrement les rayons lumineux réfléchis (phénomène de dispersion).

Plusieurs équipes de recherche [SGF77, GGL87, Rob02, MJC+03] ont mesuré la réflexion des rayons lumineux sur les cheveux, à l'aide d'un photo-goniomètre. Un modèle optique de cheveu, construit à partir des courbes goniophotométriques, a été initialement proposé par Stamm *et al.* [SGF77]. Il est illustré sur la Figure 1.9.

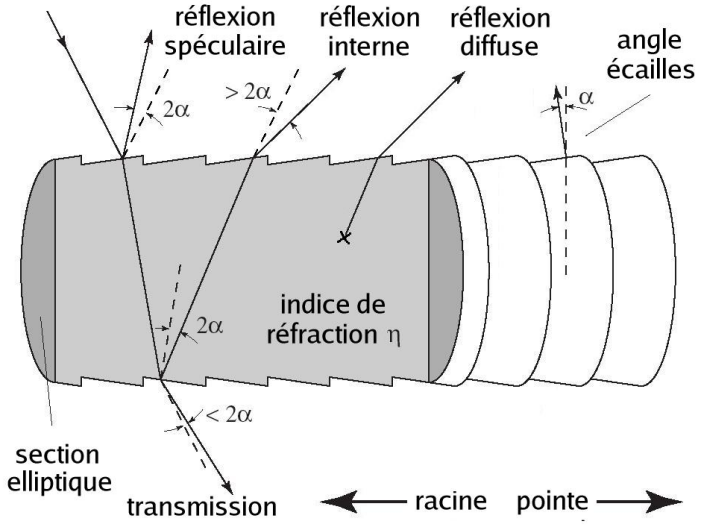


FIG. 1.9: *Modèle optique d'un cheveu, proposé à l'origine par [SGF77], puis repris par divers travaux en physique du cheveu [GGL87], et récemment en informatique graphique [MJC+03]. Image tirée de [MJC+03].*

Ce modèle retient une composante en transmission, et trois composantes en réflexion comprenant la réflexion spéculaire, la réflexion interne (après un passage des rayons dans la fibre), et la réflexion diffuse (incluant le reste des rayons lumineux absorbés par la fibre et qui en ressortent du côté de la lumière). A cause des écailles, la réflexion spéculaire et la réflexion interne suivent des directions différentes, et produisent des pics de réflexion séparés, nettement visibles sur les courbes goniophotométriques. La réflexion spéculaire correspond au reflet primaire de la chevelure (de la couleur de la lumière), et la réflexion interne au reflet secondaire de la chevelure (de la couleur du cheveu). Ces deux types de reflets sont illustrés par la Figure 1.38, à droite. Les expériences montrent que moins le cheveu est pigmenté, plus la réflexion diffuse est importante. En effet, comme mentionné plus haut, une fibre fortement pigmentée absorbe beaucoup plus la lumière qu'une fibre peu pigmentée, qui réémet la lumière reçue sous forme diffuse. Ces propriétés sont utilisées en cosmétologie pour étudier la brillance d'une chevelure (voir Section 2.2).

Effets de l'eau

Si l'on veut simuler dans la suite une chevelure mouillée, pour des applications de coupe et de coiffure par exemple, il est nécessaire de connaître et de bien comprendre les phénomènes physiques qui se produisent lorsque les cheveux sont en contact avec l'eau. Le cheveu est en effet perméable à l'eau, et peut absorber jusqu'à 40% de son propre poids en eau. Cette absorption d'eau cause un changement important des propriétés géométriques, mécaniques et optiques du cheveu.

Pour étudier l'impact de l'eau sur le cheveu, les physiciens observent l'évolution des propriétés capillaires (longueur, diamètre, module d'élasticité, etc.) en faisant varier l'*humidité relative* ambiante (souvent abrégée *HR*). L'humidité relative de l'air est mesurée comme le rapport entre la densité en vapeur d'eau présente et la densité de vapeur en saturation (connue pour une température donnée). Une humidité relative de 0% correspond donc à un air parfaitement sec (condition idéale, qui n'existe pas dans la réalité), et une humidité relative de 100% à un air saturé en eau. Des courbes, tirées de [Zvi86, BW05], et montrant l'évolution de divers paramètres du cheveu (reprise en eau, longueur, diamètre, modules d'élasticité) en fonction de l'humidité relative, sont présentées sur la Figure 1.10.

Sous l'effet de l'humidité, le cheveu gonfle de manière anisotrope : son diamètre peut subir une augmentation maximale de 15% environ, tandis que sa longueur augmente au maximum de seulement 2%. De plus, les liaisons hydrogène de la kératine, dites liaisons *faibles*, majoritairement présentes dans la kératine, se cassent au contact de l'eau, affectant ainsi fortement la rigidité du cheveu. Comme on peut le voir sur les courbes de la Figure 1.10, les modules d'élasticité du cheveu en traction et en flexion diminuent d'un facteur 4, tandis que le module en torsion diminue d'un facteur 10. Le cheveu mouillé est donc beaucoup plus déformable que le cheveu sec. Lorsque le cheveu sèche à nouveau, les liaisons hydrogène se reforment, redonnant au cheveu sa forme naturelle. En fait, mouiller un cheveu revient à accélérer les relaxations du matériau, et donc son retour à sa forme initiale. Un cheveu naturellement raide, et frisé par une mise en plis (n'affectant que les liaisons hydrogène de la kératine), redeviendra plus rapidement raide lorsqu'on le mouille. De même, un cheveu frisé naturellement, et lissé par un brushing, redeviendra plus rapidement frisé au contact de l'eau. Pour obtenir un frisage ou un lissage artificiel durable, qui "tienne" notamment à l'eau, il faut agir sur les liaisons internes fortes de la kératine (liaisons disulfures), qui ne peuvent être modifiées que par traitements chimiques (permanente, défrisage).

L'aspect visuel d'une chevelure mouillée est également très différent d'une chevelure à sec : celle-ci apparaît beaucoup plus foncée, plus luisante et moins volumineuse (voir Figure 1.11). La couleur du cheveu fonce effectivement beaucoup lorsque le cheveu est mouillé : on observe un assombrissement de 21% pour les cheveux châtains, et de 52% pour les cheveux blonds. L'augmentation de la brillance n'est pas due à une meilleure réflexion spéculaire, mais à une diminution de la réflexion diffuse : le matériau mouillé devient plus homogène, son indice de réfraction diminue, et tout se passe comme si l'eau gainait extérieurement le cheveu, empêchant la lumière de ressortir. Ainsi, en présence d'eau, la brillance des cheveux châtains augmente de 29% et celle des cheveux blonds de 259%. Notons également que lorsque le cheveu est mouillé, ses écailles s'écartent légèrement, mais son ellipticité ne varie presque pas. Enfin, la perte de volume d'une chevelure mouillée est causée par la nature cohésive de l'eau : les cheveux mouillés vont se coller les uns aux autres, et donc la teneur en air de la chevelure va diminuer.

L'humidité est donc un facteur qui modifie beaucoup les propriétés mécaniques et optiques des cheveux. Aussi, dans les laboratoires de mise au point de produits capillaires, les expériences physiques sur les cheveux s'effectuent toujours dans une atmosphère contrôlée. Nous décrirons dans la suite quelques unes de ces expériences.

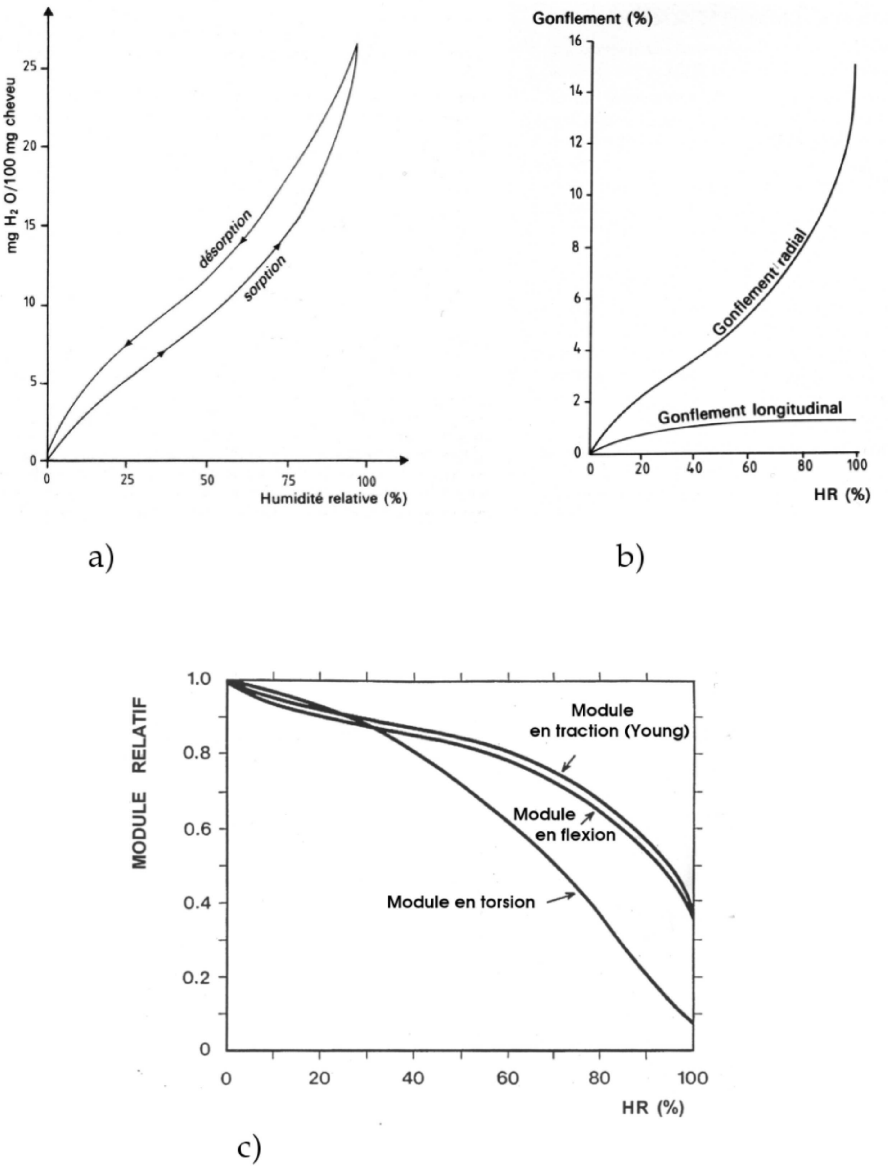


FIG. 1.10: *Évolution des paramètres géométriques et mécaniques du cheveu en fonction de l'humidité relative ambiante [Zvi86, BW05] : a) reprise en eau du cheveu ; b) augmentation de sa longueur et de son diamètre ; c) diminution des modules d'élasticité en traction (module d'Young), en flexion et en torsion (©L'Oréal).*

2 Cosmétologie : soin et traitements du cheveu

L'adjectif *cosmétique* provient du grec *kosmêtikos* qui signifie : « relatif à la parure ». Les *produits cosmétiques* (également appelés produits de beauté) servent à entretenir et à embellir la peau, les cheveux ou la barbe. La *cosmétique* (appelée également *cosmétologie*) est l'étude de la composition, de l'emploi des produits cosmétiques, et de leurs effets sur l'organisme. Elle désigne également les techniques de fabrication des produits de beauté.



FIG. 1.11: *Comparaison entre des cheveux réels secs, et les mêmes cheveux mouillés (images tirées de [Gra97]).*

2.1 L'industrie cosmétique

De nos jours, l'industrie cosmétique représente un marché énorme, en pleine expansion. En France par exemple, le marché cosmétique se chiffrait en 2003 à six milliards et demi d'euros, dont un quart pour la consommation de produits capillaires (source : institut national de la consommation[3]). En 2004, le chiffre d'affaire dans la branche cosmétique de L'Oréal, leader mondial du marché, s'élevait à plus de 14 milliards d'euros, dont près de 6 milliards pour les produits capillaires, répartis environ à 60 % pour le soin et la forme du cheveu et à 40 % pour la coloration (voir Figure 1.12). Précisons de plus que les deux tiers des produits capillaires étaient destinés au grand public, et le reste aux professionnels de la coiffure (source : http ://www.loreal-finance.com).

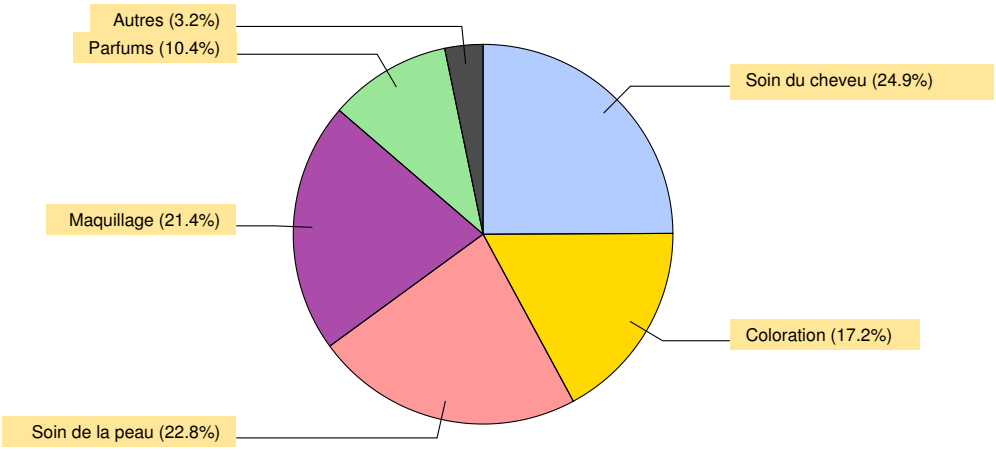


FIG. 1.12: *Répartition en 2004 des parts de marché de L'Oréal, par métier (source :* http ://www.loreal-finance.com)

La cosmétique capillaire répond à deux types d'attente de la part des consommateurs :

1. L'*hygiène* et le *soin* du cheveu, dont le but consiste à concevoir des produits (shampoings, après-shampoings, démêlants, etc.) qui réparent les cheveux abîmés, ou les protègent des agressions quotidiennes telles que la pollution, le soleil, l'humidité, le stress, etc.
2. La modification de l'apparence des cheveux, qui comprend :

[3] http ://www.conso.net.

– La modification de la *forme* des cheveux, de manière temporaire (gel, laque, mousse) ou permanente (défrisage, permanente).
– La modification de la *couleur* des cheveux, de manière temporaire ou permanente (diverses techniques de coloration existent).

Le fait de transformer l'apparence de ses cheveux peut être motivé par diverses raisons, mais dans les sociétés modernes, il s'agit principalement de lutter contre le vieillissement (coloration des cheveux blancs par exemple), ou bien de suivre une mode (décoloration des cheveux, frisage ou défrisage, etc.).

En amont de la fabrication des produits capillaires, une part importante de travail dans les sociétés de cosmétique est généralement consacrée à la recherche sur le cheveu (pour le groupe L'Oréal, cela concerne chaque année environ 3 % du chiffre d'affaire), et à la mise au point très contrôlée de nouveaux produits cosmétiques. Dans les laboratoires de recherche et de développement, ces produits sont conçus et testés en application à des cheveux individuels ou à des mèches standardisés, en suivant des protocoles très rigoureux. Une fois développés, ces nouveaux produits capillaires sont testés *in vivo* par des experts du cheveu, qui vérifient leurs performances "grandeur nature". Si les objectifs sont remplis, on autorise alors l'industrialisation de ces produits à grande échelle, puis leur commercialisation.

Nous avons collaboré pendant trois ans avec le Département de Recherche Avancée de L'Oréal, spécialisé dans l'étude et la mesure scientifique des propriétés des cheveux et de la peau. La recherche effectuée par ce Département se situe en amont d'une recherche plus appliquée visant à concevoir des produits cosmétiques. Dans la suite, nous décrivons la méthodologie suivie dans les Laboratoires de Recherche Avancée pour étudier et comprendre les cheveux, toujours dans le but de les protéger, de les embellir, ou de modifier leur apparence.

2.2 Métrologie capillaire

Un certain nombre de notions intuitives, couramment employées par les cosmétologues, servent à qualifier l'état, la santé et la beauté d'une chevelure. Ces critères d'appréciation de la chevelure peuvent caractériser des qualités purement visuelles (brillance, couleur ou pigmentation, texture, volume, discipline) ou tactiles (douceur, facilité de démêlage), ainsi que le comportement de la chevelure sur la durée (tenue d'une coiffure, résistance), ou en mouvement (souplesse, nervosité). La notion de *discipline* de mèche, qui caractérise l'alignement local des cheveux dans une mèche, et la notion de *nervosité* d'une boucle, qui traduit le niveau d'élasticité de la boucle, sont illustrées sur la Figure 1.13. Ces deux critères seront notamment utilisés ou évalués dans notre modélisation physique de cheveux (voir Chapitre 7).

Si chacune de ces propriétés cosmétiques peut être évaluée relativement facilement par nos sens visuels et tactiles, elle est parfois difficile à caractériser de manière scientifique et objective, car elle ne correspond pas forcément à un paramètre physique ou physiologique particulier. Par exemple, il a été montré que le volume d'une coiffure dépendait des paramètres physiologiques suivants [Rob02, Gra97] : le diamètre, la densité, la raideur, la courbure, le coefficient de frottement et la cohésion des cheveux. De plus, ces paramètres ne sont pas tous indépendants ; par exemple, une mèche sera d'autant plus brillante et facile à démêler qu'elle sera disciplinée.

Les chercheurs en cosmétologie s'efforcent ainsi de mettre en œuvre des méthodes et des protocoles expérimentaux sur des échantillons de vrais cheveux, afin de caractériser et de mesurer *scientifiquement* chacun de ces critères cosmétiques. C'est ce que l'on appelle la *métrologie capillaire*. Les techniques métrologiques développées par les scientifiques servent alors ensuite à étudier l'effet des produits capillaires (shampoings, gel, coloration, etc.), de manière systématique et très contrôlée. La comparaison des résultats d'une expérience obtenus sur des mèches traitées et des mèches non traitées

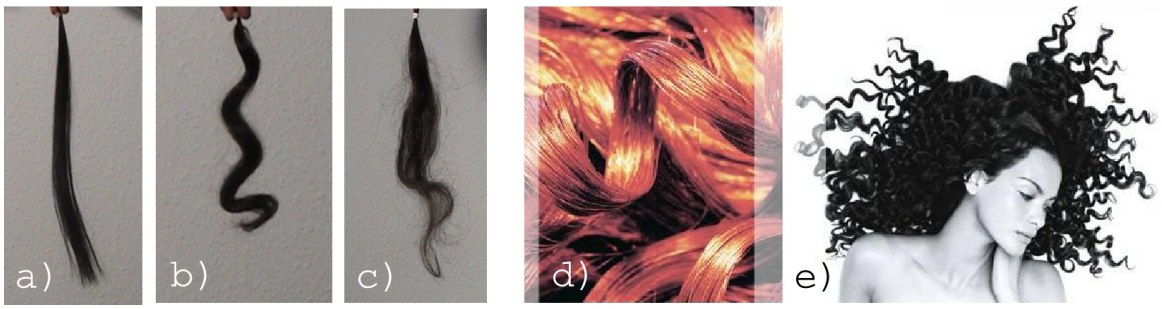


FIG. 1.13: *Discipline et nervosité des cheveux : a) mèche de cheveux raides ayant une bonne discipline ; mèche de cheveux frisés ayant (b) une bonne et (c) une mauvaise discipline ; d) et e) illustrent la nervosité d'une mèche bouclée, propriété qui traduit l'élasticité de la mèche (une mèche "nerveuse" se comporte comme un ressort) (©L'Oréal). Notons que la mèche bouclée en d) présente aussi une très bonne discipline, car les cheveux sont parfaitement alignés les uns par rapport aux autres.*

permet d'évaluer l'apport du produit capillaire sur tel ou tel paramètre.

Nous avons eu la chance de visiter certains laboratoires de recherche avancée chez L'Oréal, et de voir concrètement comment les propriétés physiques des cheveux pouvaient être mesurées. Au cours de notre étude sur la modélisation du cheveu, nous avons alors pu solliciter l'aide de chercheurs[4] travaillant dans ces laboratoires, afin d'acquérir des données expérimentales sur des échantillons de cheveux que nous avions prélevés. Ces données nous ont grandement aidés pour la validation de nos modèles (voir Chapitres 6 et 7). Dans la suite, nous présentons ainsi quelques unes des techniques métrologiques mises au point et utilisées chez L'Oréal pour mesurer les propriétés capillaires.

État de surface des cheveux

L'*état de surface des cheveux* conditionne un grand nombre de qualités capillaires : la brillance, la couleur, la douceur d'un cheveu, la facilité de démêlage et la discipline d'une mèche, etc. Des cheveux présentant une cuticule intacte seront brillants, doux, et faciles à démêler, tandis que des cheveux abîmés en surface seront ternes (la lumière n'étant plus réfléchie de manière homogène), rêches (les écailles ébréchées étant sensibles au toucher), et propices aux emmêlements (imbrication des écailles de différents cheveux). Plusieurs types d'expériences permettent d'observer l'état de surface des cheveux et d'en déduire de telles propriétés pour le cheveu.

L'observation des cheveux par microscopie à balayage, ou plus directement avec une micro-caméra appelée vidéo-microscope, révèle clairement la géométrie des écailles, la forme de la section, la couleur et la brillance du cheveu. On peut en particulier évaluer l'état de la cuticule, voir l'usure de la tige, la présence de nœuds ou de fragilités locales. Si la partie du cheveu située vers la racine, nouvellement constituée, est encore intacte, il n'en est souvent pas de même pour la partie inférieure du cheveu, qui subit depuis sa formation des agressions répétées, dues au soleil, à l'eau, à la pollution, au peignage, ou à certains traitements capillaires. Une usure accélérée de la cuticule peut être le résultat d'actions mécaniques qui abîment le cheveu (peignage intensif, crêpage, nœuds), ou de traitements capillaires chimiques excessifs et répétés très souvent (permanente, défrisage, décoloration, etc.). La Figure 1.14 illustre tous ces phénomènes.

La *brillance* du cheveu, aussi appelée *lustre*, est évaluée plus précisément en étudiant la réflexion de la lumière sur le cheveu à l'aide d'un photo-goniomètre. La brillance dépend de la pureté des reflets de la chevelure : une chevelure brillante présentera une réflexion spéculaire très nette, avec très

[4]Nous remercions vivement Bertrand Nedellec d'avoir aimablement accepté de réaliser, pour notre étude, des mesures au vidéomicroscope d'une douzaine d'échantillons de cheveux.

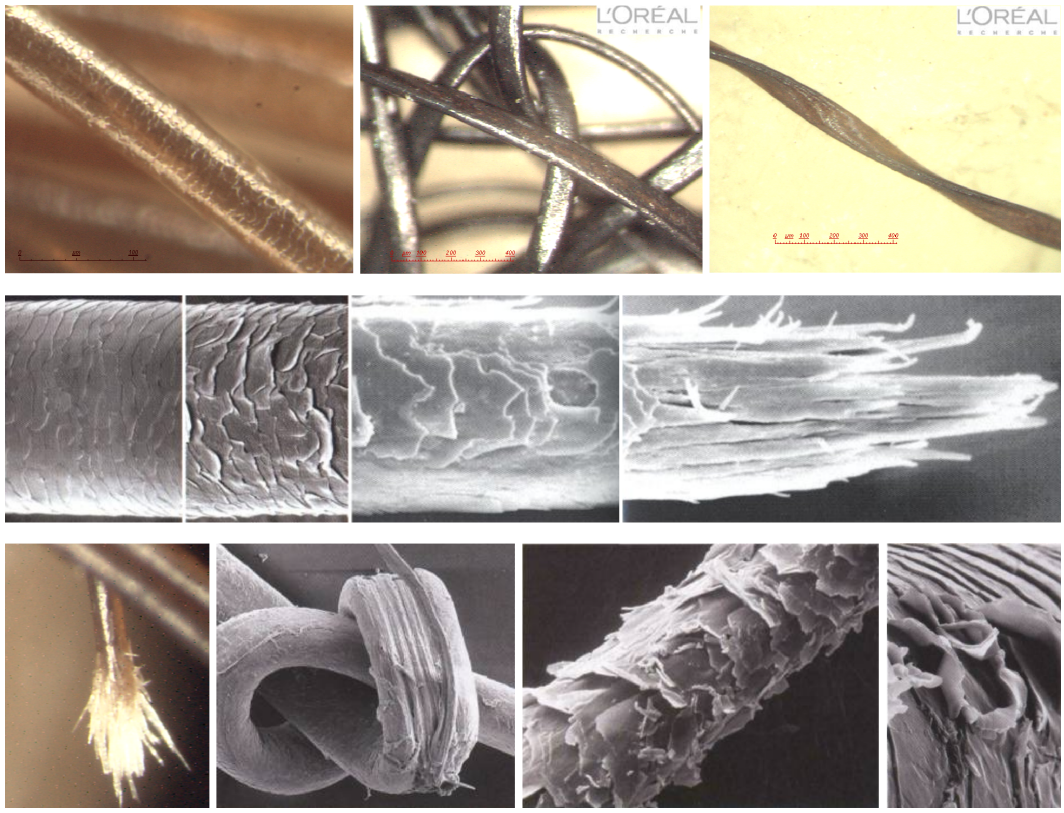


FIG. 1.14: *État de surface des cheveux, évalué à partir d'observations au microscope à balayage, ou à l'aide d'un vidéo-microscope. De haut en bas et de gauche à droite : 1) Cheveu caucasien présentant un bon état de surface. 2) Cheveux africains elliptiques enchevêtrés. 3) Cheveu africain très elliptique et présentant une torsion très marquée sur toute sa longueur. 4) Usure du cheveu, causant une atteinte croissante de la cuticule de la racine vers la pointe, jusqu'à éclatement et division du cortex [AMB01] (©L'Oréal). 5) Fourche visualisée au vidéo-microscope. 6) Nœud, souvent présent dans la coiffure africaine, qui fragilise le cheveu et peut provoquer sa rupture [Gra97]. 7) Destruction de la cuticule par des permanentes répétées et excessives [Gra97]. 8) Destruction de la cuticule par brossage à rebrousse-poil (crêpage) [Gra97].*

peu de rayons diffus venant brouiller cette réflexion directe. Ainsi, le lustre d'un cheveu est mesuré comme le rapport entre l'intensité maximale de la réflexion spéculaire et l'intensité maximale de la réflexion diffuse [GGL87]. Comme nous l'avons vu précédemment, le phénomène de diffusion est beaucoup plus important pour les cheveux clairs que pour les cheveux fortement pigmentés, ce qui explique pourquoi les cheveux noirs apparaissent beaucoup plus brillants que les cheveux blonds (voir Figure 1.36). Cependant, la brillance d'une chevelure n'est pas seulement conditionnée par la couleur des cheveux, mais dépend également de la discipline et de l'homogénéité d'une chevelure : les cheveux asiatiques, lisses et réguliers, sont luisants comme de la soie, ce qui n'est pas le cas des cheveux africains, pourtant également pigmentés ; ces derniers, crépus et irréguliers, ont plutôt un aspect mat et laineux. Des études supplémentaires montrent que la brillance du cheveu est altérée par le soleil, la saleté, le sébum, ou encore la décoloration artificielle [GGL87].

Le bon état de la cuticule conditionne également les propriétés de *douceur* des cheveux, et la *facilité de démêlage*. Pour évaluer objectivement la douceur d'un cheveu, les laboratoires utilisent un appareil capable de mesurer le coefficient de frottement longitudinal du cheveu en fonction du temps. Ces mesures sont faites depuis la racine vers la pointe, et inversement. Dans le cas d'un cheveu non traité, la courbe obtenue dans le sens pointe - racine présente d'assez fortes discontinuités, dues entre

autres à l'accrochage des écailles. Lorsque le cheveu est traité avec un produit douceur, le cheveu est gainé par une enveloppe et les courbes mesurées dans les deux sens présentent la même allure : le graphique est isotrope (vibrations avec peu d'amplitude). Pour appréhender l'état d'emmêlement d'une mèche, une machine à démêler automatiquement a été créée. Cette machine, équipée d'un peigne et de capteurs de force, évalue la force qui est nécessaire pour passer dans une mèche (le démêlage s'effectue pas à pas, des pointes vers les racines, comme le fait un coiffeur). L'efficacité d'un produit démêlant peut ainsi être mise en évidence par ce procédé.

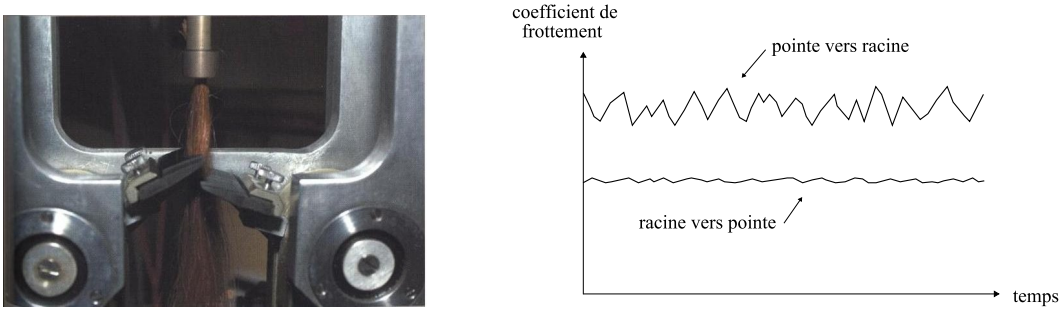


FIG. 1.15: *À gauche : machine à démêler les mèches (©L'Oréal). À droite : graphe de douceur d'un cheveu.*

Tenue d'une coiffure

La tenue statique d'une coiffure, c'est-à-dire le maintien de sa forme au cours du temps, peut être évaluée par l'observation de la détente de boucles de cheveux préalablement traités ou non avec un produit coiffant. Le principe consiste à enrouler des mèches de cheveux sur des bigoudis et à les sécher. Une fois les bigoudis retirés, les mèches ont la forme d'anglaises très disciplinées, et on les suspend à un support. Dans le cas d'une évaluation de laque, on vaporise les mèches à ce moment-là. Sous l'effet de leur propre poids, les boucles vont alors se détendre et se déformer, et on va mesurer régulièrement, pour chaque mèche, l'amplitude de la détente, ainsi que la perte progressive de discipline. Un produit de coiffage appliqué sur une mèche sera donc efficace dans le temps si la déformation de la mèche est évaluée comme minimale sur la durée (voir Figure 1.16 (a)).

Pour évaluer la tenue dynamique d'une coiffure, on utilise un appareil à "perruques mobiles". Le produit à tester est appliqué sur une partie de la chevelure montée sur deux plans inclinés. Les autres mèches restent à l'état naturel ou reçoivent un produit de référence. Après brossage et mise en forme de la totalité des mèches, le mobile est agité pour reproduire les mouvements auxquels est soumise une chevelure pendant la journée. La comparaison des deux parties de la chevelure et la mesure à l'aide d'une mire quantifient la tenue de la coiffure (voir Figure 1.16 (b)).

2.3 Conclusion

La connaissance des propriétés élémentaires du cheveu est essentielle si l'on souhaite concevoir un modèle numérique d'une chevelure respectant un certain réalisme.

Pour autant, les données fournies ne correspondent pas forcément à notre échelle de travail (échelle de la chevelure complète), et ne sont donc pas toujours faciles à utiliser directement. L'expérience a montré que l'important n'était pas de disposer des valeurs numériques dans l'absolu de certains facteurs caractéristiques (par exemple, la valeur exacte d'un coefficient de frottement), mais plutôt de bien connaître qualitativement certains comportements typiques du cheveu, à un niveau très fin (par

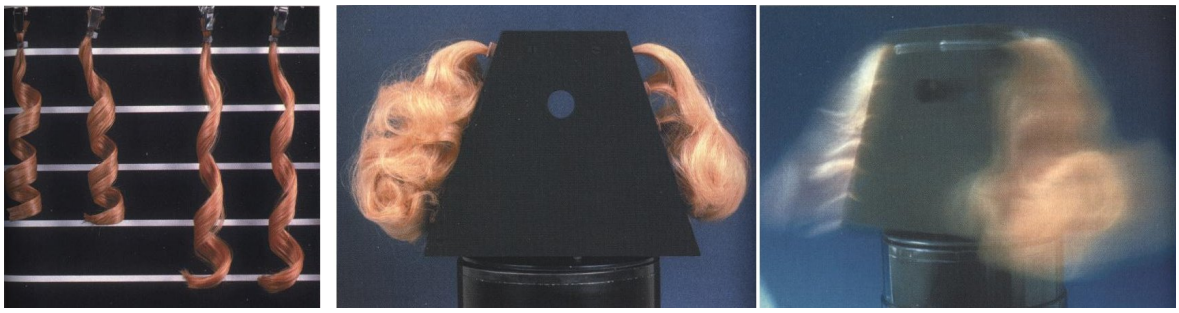


FIG. 1.16: *Évaluation de la tenue (a) statique d'une coiffure, par mesure de la détente de boucles au cours du temps, ou (b) dynamique, par la machine à perruques mobiles (©L'Oréal).*

exemple, savoir que les modules d'élasticité en traction, en courbure et en élasticité évoluent de manière différente lorsque l'humidité relative augmente, et dans quel rapport).

La connaissance des expériences de métrologie capillaire est donc très importante dans le cadre de cette thèse, car elle révèle beaucoup de données aptes à être exploitées pour concevoir un simulateur réaliste de cheveux. Réciproquement, ces expériences physiques nous permettent également de mieux comprendre les attentes des scientifiques de L'Oréal quant au modèle numérique de cheveu que nous pouvons leur proposer. Il faut savoir que les techniques métrologiques actuelles s'effectuent sur des cheveux ou mèches de cheveux réels, achetés dans le monde entier, et à long terme, la mise au point d'un simulateur numérique de cheveux, intégrant l'ensemble des propriétés connues sur le cheveu, pourrait servir par exemple à assister ces expériences en permettant la visualisation et la validation des résultats obtenus. On pourrait alors imaginer la réduction du nombre d'expériences sur mèches ou sur chevelures réelles, au profit d'*essais virtuels*, moins coûteux en temps et en argent. De plus, les chercheurs en science capillaire voient dans un modèle numérique de cheveux un intérêt supplémentaire non négligeable : la *prédiction* du comportement des cheveux sous l'influence de tel ou tel facteur. En effet, un simulateur physique de cheveux offrirait la possibilité d'étudier l'influence réelle de chaque paramètre physique (décorrélé des autres paramètres) sur la forme ou le mouvement des cheveux. Notons que ce genre d'étude exhaustive est très difficile voire impossible à réaliser de manière expérimentale. Grâce à un simulateur performant de cheveux, les cosmétologues pourraient ainsi acquérir une meilleure connaissance sur la physique du cheveu, et donc identifier les paramètres physiques essentiels sur lesquels il faut jouer pour obtenir tel ou tel effet cosmétique.

D'autre part, comme nous l'avons déjà noté en introduction, il existe une demande croissante en terme d'essayage virtuel de coiffures : de plus en plus de sites se présentant comme des "salons de coiffure virtuels", qui ne sont autres que des portails de sociétés de cosmétiques, font leur apparition sur le web, et proposent des services d'essayage de coiffures, le plus souvent payants. Les coiffures montrées sont issues de photographies, éventuellement prises sous divers angles, et stockées dans des bases de données. L'utilisateur peut choisir un visage en 2D ou en 3D (celui qui lui correspond le mieux), et une coiffure donnée, toute prête à l'emploi. Ces salons de coiffure virtuels sont en réalité très limités, car il n'y a pour l'instant aucun moyen pour l'utilisateur de spécifier son propre type de cheveux (qui a tout de même un impact très fort sur le type de coiffure qu'il va pouvoir porter !), ni de voir le modèle en mouvement, ou sous l'effet de l'humidité, etc. Un modèle numérique de cheveux, paramétré par les caractéristiques d'une chevelure donnée (groupe ethnique, zone d'implantation, épaisseur du cheveu, degré de frisure naturelle, etc.) pourrait donc s'avérer extrêmement utile pour ce genre d'application. En allant encore plus loin, on pourrait aussi imaginer concevoir dans le futur un logiciel de formation à destination des apprentis-coiffeurs.

3 Précédents modèles numériques

Depuis quelques années, les personnages virtuels sont de plus en plus présents dans notre environnement, que ce soit dans les jeux vidéos, les films d'animation, ou les publicités. Modéliser correctement le mouvement et l'apparence de la chevelure s'avère alors crucial si l'on souhaite générer des personnages animés réalistes, mais cela soulève aussi beaucoup de problèmes. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, une chevelure humaine est composée d'environ 150 000 cheveux en interaction les uns avec les autres. La très grande complexité de ce système rend donc très difficile sa modélisation informatique, aussi bien lorsqu'il s'agit de simuler avec précision le mouvement des cheveux en collison, que de rendre de manière réaliste tous les phénomènes optiques complexes (dispersion de la lumière, auto-ombrage, etc.) se produisant au sein d'une chevelure. La modélisation numérique des cheveux représente un enjeu important pour diverses applications, telles que les environnements virtuels, le prototypage cosmétique, et l'industrie du loisir. Chacune de ces applications a ses propres objectifs ou contraintes : le réalisme et la précision du modèle sous-jacent, le rendu visuel, la performance des calculs, etc.

Comme mentionné par Magnenat-Thalmann et Hadap [MTH00], la modélisation d'une chevelure en informatique graphique soulève trois problèmes distincts (mais non forcément décorrélés) : la *modélisation de coiffure*, la *simulation du mouvement* des cheveux, et leur *rendu*. La modélisation de coiffure consiste à concevoir un système permettant la création de la forme - au repos - d'une chevelure, le but étant qu'un utilisateur du logiciel puisse produire de manière intuitive des coiffures réalistes et variées sur un personnage virtuel. La simulation du mouvement des cheveux implique la résolution de la dynamique des cheveux, la gestion des collisions entre les cheveux et le corps, et au sein même de la chevelure. Enfin, le rendu de cheveux suppose de concevoir un modèle d'éclairage de la chevelure, tenant compte des phénomènes de dispersion de lumière, de la projection des ombres, des problèmes d'antialiasage liés à la visualisation de structures très fines, etc.

La modélisation de coiffures, la simulation et le rendu de cheveux représentent actuellement des domaines de recherche récents et très actifs. Nous présentons dans cette partie les difficultés scientifiques soulevées par ces trois domaines, ainsi que l'ensemble des méthodes qui ont été développées depuis quelques décennies - dans la recherche académique ou industrielle - afin de les résoudre.

Cet état de l'art a été réalisé en grande partie en collaboration avec Kelly Ward, Ming Lin (équipe GAMMA du laboratoire d'informatique de Chapel Hill en Caroline du Nord), Tae-Yong Kim (Rythm and Hues Studio), et Steve Marschner (Université de Cornell). La version anglaise (un peu plus détaillée sur la partie rendu) résultant de cette collaboration a fait l'objet d'un article actuellement en cours d'évaluation [WBK+06]. Dans cet article, j'ai pris en charge avec Kelly Ward la rédaction des parties portant sur la modélisation de coiffures et sur l'animation (ces deux domaines, et en particulier l'animation, constituant les thèmes essentiels de ma thèse). Les Sections 3.1 et 3.2 retranscrivent ces deux parties. Je propose en Section 3.3 une vue plus synthétique des méthodes de rendu, suffisante pour introduire au Chapitre 4 notre contribution sur l'auto-ombrage interactif d'une chevelure.

3.1 Modélisation de coiffures

Modéliser une coiffure en informatique graphique est un processus complexe qui peut être subdivisé en plusieurs étapes clef. Il s'agit d'abord de répartir des cheveux sur la tête d'un avatar virtuel, en choisissant la densité ou l'orientation des cheveux. Ensuite, il faut modeler la forme des cheveux, et pour cela définir un type de cheveux (lisses, bouclés, frisés), puis spécifier une coupe. Enfin, si l'on souhaite créer une coiffure élaborée, composée par exemple d'une queue de cheval ou de tresses, il faut être capable de prendre en compte ce type d'éléments dans la modélisation.

Si l'on ne dispose pas d'outils assez performants ou assez intuitifs, le processus de création d'une coiffure peut s'avérer être très long voire pénible pour l'utilisateur du logiciel. C'est pourquoi la majo-



FIG. 1.17: *Coiffures réelles pour différents types de cheveux (©Free-Beauty-Tips.com, ©Schwarzkopf, ©naturalhair.org).*

rité des méthodes conçues pour modéliser des coiffures proposent également une interface graphique du logiciel destinée à faciliter la tâche de l'utilisateur.

Dans cette section, nous présentons les différentes approches ou logiciels qui ont été développés en informatique graphique pour modéliser des coiffures. Celles-ci peuvent être répertoriées schématiquement selon trois catégories :

- Les méthodes *géométriques*, qui demandent en général à l'utilisateur de spécifier directement la forme de la chevelure à l'aide de courbes et surfaces paramétriques.
- Les méthodes de *simulation physique*, basées sur un modèle pseudo-physique, statique en général. Dans ce cas, l'utilisateur doit seulement spécifier quelques paramètres clef qui vont servir à calculer la forme de la chevelure automatiquement.
- Les méthodes *à base d'images*, très récentes, qui permettent de capturer automatiquement la géométrie d'une chevelure réelle à partir de photographies prises depuis plusieurs points de vue, éventuellement sous différents éclairages.

Implantation des cheveux sur le cuir chevelu

Étant donné le très grand nombre de cheveux composant une chevelure humaine, il est tout-à-fait inimaginable de spécifier à la main l'emplacement de tous les cheveux sur le crâne de l'avatar. Pour rendre cette tâche faisable par un utilisateur en un temps raisonnable (quelques heures au maximum), un certain nombre d'outils ont été développés, en 2D ou en 3D.

Certaines approches de modélisation ne permettent pas de placer les cheveux directement en 3D sur le crâne d'un avatar virtuel, mais proposent à l'utilisateur de "peindre" les emplacements des racines de cheveux sur une carte 2D qui est ensuite projetée sur la tête en 3D. Dans l'approche de Rosenblum *et al.* [RCT91], cette carte 2D est appelée "carte des follicules", et autorise l'utilisateur à ne traiter qu'une moitié du cuir chevelu mis à plat, l'autre moitié étant automatiquement traitée par symétrie. Le plaquage final sur le crâne 3D est fait par projection sphérique, de même que dans [Yu01]. Dans la méthode de Kim et Neumann [KN02], l'utilisateur peut placer interactivement des sections de mèches prédéfinies (cercle, triangle, etc.) sur un morceau de surface paramétrique 2D ; ce morceau de surface est ensuite disposé par l'utilisateur sur le crâne 3D, par manipulation des points de contrôle, et les sections de mèches dessinées au préalable sur la surface servent alors de base des mèches sur le cuir chevelu. La figure 1.18 illustre cette approche.

Une méthode alternative consiste à positionner directement les racines des cheveux en 3D sur le cuir chevelu. Patrick et Bangay [PB03] proposent une interface interactive grâce à laquelle l'utilisateur peut sélectionner en 3D les triangles du maillage de la tête sur lesquels il souhaite implanter des cheveux, il peut ainsi spécifier la zone du cuir chevelu. Chaque triangle sélectionné représente, dans cette approche, la base d'une mèche, ce qui signifie que la géométrie des mèches dépend fortement du maillage du crâne virtuel. Cela peut être très gênant, et notamment induire un manque de contrôle sur la forme des mèches.

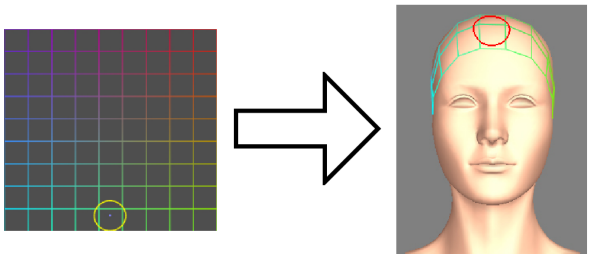


FIG. 1.18: *Morceau de surface paramétrique plaqué sur le maillage 3D de la tête, par la méthode de Kim et Neumann [KN02]. Le cercle placé sur la carte 2D (à gauche) par l'utilisateur servira de base sur le crâne pour une future mèche (à droite).*

Une fois le cuir chevelu spécifié, il reste à implanter les cheveux individuels sur cette zone. La plupart des approches utilisent une distribution uniforme des racines sur le cuir chevelu, ce qui correspond relativement bien à la réalité, tout au moins dans le cas d'une chevelure normale (sans alopécie). Pour simplifier la complexité de la chevelure, certaines méthodes utilisent le fait que les cheveux proches sur le crâne peuvent avoir des formes très similaires sur toute leur longueur : ils sont alors regroupés en *mèches*. Typiquement, une mèche est définie par une courbe 3D, qui lui sert de squelette, et par un contour de forme simple (par exemple un cercle ou un triangle), qui définit une enveloppe autour du squelette. Les cheveux individuels qui seront rendus sont alors placés à l'intérieur de la mèche, le plus souvent en utilisant une distribution uniforme 2D servant à positionner l'intersection des cheveux avec chaque section de la mèche, en commençant par les racines [PCP01, CK05a, CSDI99]. Cependant, si les sections racines des différentes mèches se recouvrent sur le cuir chevelu, une densité plus forte de cheveux sera générée dans les zones de recouvrement, ce qui pourra provoquer des artefacts visuels gênants.

Afin de garantir une distribution de cheveux uniforme sur le crâne, Kim et Neumann [KN02] commencent par distribuer uniformément les racines des cheveux sur le cuir chevelu, puis assignent une (et une seule) mèche d'appartenance à chacune des racines ainsi réparties. Pour obtenir des variations de densité, certaines approches permettent à l'utilisateur de peindre les niveaux de densité sur le cuir chevelu [HR04, CK05a]. Ces densités sont la plupart du temps visualisées en 3D en utilisant un code de couleur (noir pour très dense, rouge pour assez dense, etc.). Le contrôle du paramètre densité peut être utile pour synthétiser des coupes spéciales où les cheveux sont rasés par endroits, des cas d'alopécie, etc. Hernandez et Rudomin [HR04] ont étendu ce type d'interface pour permettre à l'utilisateur de peindre d'autres caractéristiques de la chevelure sur le crâne de l'avatar (longueur, frisure, etc.) *via* des codes de couleur.

Modélisation de la forme des cheveux par des approches géométriques

La plupart des techniques de modélisation de coiffures sont de nature géométrique. Elles reposent en général sur une représentation paramétrique de la chevelure, que l'utilisateur va pouvoir modifier facilement *via* des points de contrôle. L'avantage d'une telle représentation est qu'elle offre beaucoup de flexibilité, et qu'elle propose une interface intuitive et facile d'utilisation. Les primitives les plus utilisées sont les courbes paramétriques, pour la définition des cheveux individuels ou des squelettes de mèches, et les surfaces paramétriques, pour la représentation de mèches 2D. En général, la modélisation à partir de telles représentations ne sert qu'à définir une forme globale pour la chevelure, tandis que les détails (ondulations, boucles, etc.) sont ajoutés ensuite de manière plus automatique, par exemple à l'aide d'une modulation sinusoïdale des primitives, ou par transfert de formes à différents niveaux de détail.

a) Forme globale de la chevelure

Beaucoup d'approches ont choisi de représenter des mèches de cheveux par des *surfaces paramétriques* [KH00, LH03, NT04], en général des NURBS[5]. Ces méthodes sont assez peu coûteuses en temps de calcul, car l'utilisation de morceaux de surfaces paramétriques (appelées également *bandes* de cheveux) pour représenter des groupes de cheveux réduit fortement la complexité de la chevelure, tout en assurant un maximum de flexibilité pour la modélisation de sa forme ; par conséquent, ce type d'approche permet également, dans une étape ultérieure, d'animer efficacement - quoique de manière assez peu réaliste - les coiffures créées (voir Section 3.2). Les cheveux individuels sont aussi très simplement rendus par plaquage de texture sur ces morceaux de surface.

Dans le cadre d'une approche non photoréaliste, Mao *et al.* ont développé une technique permettant de rendre ces bandes de cheveux dans un style "dessin animé" [MKIA04]. Leur méthode propose également une interface basée sur l'esquisse pour construire rapidement une coiffure simple : étant donné un modèle de tête 3D, l'utilisateur spécifie interactivement la zone du crâne où doivent être implantés les cheveux, puis dessine, dans la vue de face, la silhouette de la coiffure désirée. Le système génère alors automatiquement une surface représentant le contour de la coiffure, puis crée entre cette surface et la tête des bandes 2D représentant les mèches.

Cependant, l'inconvénient majeur de la modélisation par mèches 2D est que les styles de coiffure obtenus sont en général assez peu réalistes, car ils manquent de volume (voir Figure 1.19, à gauche). Afin de pallier à ce problème, Liang et Huang [LH03] extrapolent les bandes de cheveux en leur rajoutant des faces latérales, qu'ils obtiennent en projetant chaque point de la bande sur le cuir chevelu et en reliant deux à deux les points projetés aux points d'origine. La "forme en U" ainsi obtenue pour chaque bande, composée par trois polygones, permet alors de rendre la coiffure plus volumineuse.



FIG. 1.19: *Modélisation de la chevelure par des surfaces NURBS [KH00] (à gauche). Représentation de la chevelure comme un volume de coques minces [KN00] (à droite).*

Kim et Neumann [KN00] ont développé une méthode spécifique pour augmenter le réalisme visuel des coiffures modélisées à partir de surfaces paramétriques formant un ensemble de *coques minces* (*thin shell volume*). Cette méthode ajoute de l'épaisseur à la chevelure en effectuant un décalage des surfaces qui la composent le long de leurs directions normales. Les cheveux individuels sont ensuite distribués à l'intérieur du volume ainsi construit, et leur forme est modifiée grâce à un algorithme simulant de manière très simple l'effet d'un peigne virtuel. Les chevelures générées ont du volume, et présentent en surface des motifs réalistes (voir Figure 1.19, à droite).

Noble et Tang [NT04] se servent également de surfaces NURBS pour modéliser et animer en temps-réel des coiffures stylisées de type "dessin animé", mais leur approche est très différente des méthodes vues précédemment. Ici, une unique surface NURBS est utilisée au départ pour modéliser

[5]Non-uniform rational B-splines.

l'*enveloppe* du volume occupé par la chevelure. Cette surface peut être animée de manière classique par positions clefs, et son animation va définir le mouvement de base de la coiffure. L'animation de petites mèches individuelles près de cette surface va venir ajouter du détail au mouvement global (voir Section 3.2).

D'autres approches modélisent une mèche comme un *prisme trigonal* à l'aide de trois courbes B-splines, qui définissent son contour [WS92, CSDI99]. La mèche obtenue a la forme d'un prisme généralisé, à trois faces latérales, et présente donc l'avantage d'être en 3D tout en étant définie par un nombre restreint de paramètres. Pour dessiner les cheveux individuels à l'intérieur de la mèche, des coordonnées 2D sont choisies, pour chaque cheveu, aléatoirement à l'intérieur d'un disque, et sont utilisées comme coordonnées barycentriques dans les sections triangulaires de mèche pour définir les positions des points d'interpolation de chaque cheveu.

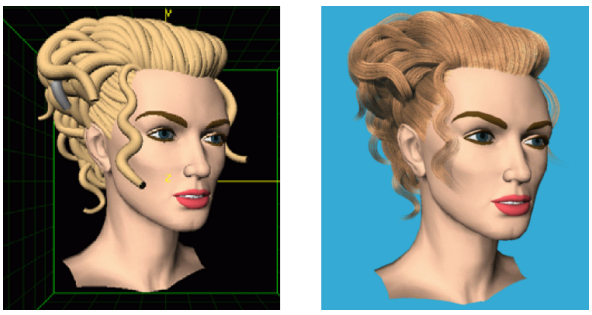


FIG. 1.20: *Le modèle de mèches par cylindres généralisés de Yang et al. [YXYW00, XY01] : à gauche, prévisualisation des cylindres généralisés et à droite, rendu final avec tracé de cheveux individuels à l'intérieur des mèches.*

Enfin, plusieurs méthodes utilisent un *cylindre généralisé* pour modéliser chaque mèche de la chevelure [YXYW00, XY01, PCP01, KN02, PBL04]. Un cylindre généralisé est défini par une courbe paramétrique, qui lui sert de squelette, et par une fonction définissant le rayon de la mèche le long de ce squelette. Des formes variées de mèches peuvent ainsi être facilement obtenues par manipulation interactive du squelette et par réglage du paramètre rayon. Le logiciel V-HairStudio [XY01] a été conçu pour offrir une interface permettant la modélisation de chevelures complexes à l'aide de cylindres généralisés (voir Figure 1.20). Une technique similaire a été récemment utilisée dans la modélisation de coiffures africaines, pour contrôler la forme de mèches tressées ou torsadées [PBL04].

De manière générale, la modélisation des mèches individuelles par des cylindres généralisés est utile pour créer des styles de coiffure dans lesquels les mèches de cheveux sont très visibles, ou bien dans le cas où la coiffure implique des formes contraintes telles que des tresses, des queues de cheval, etc. Les chevelures ne présentant pas ces caractéristiques (cheveux très lisses par exemple) sont plus difficiles à représenter avec cette approche.

b) Ajout de détails géométriques à la chevelure

Une fois que la forme globale de la chevelure a été définie - en utilisant une approche géométrique, ou bien un modèle physique - il peut être souhaitable d'ajouter des détails à la chevelure tels que des ondulations ou des boucles, afin d'augmenter le naturel ou le réalisme d'une coiffure.

Yu [Yu01] génère différents types de frisure dans la chevelure en modulant les positions des cheveux par des fonctions trigonométriques facilement paramétrables. Par le biais de ces fonctions, l'utilisateur peut ainsi contrôler la fréquence des boucles produites, et leur amplitude. Il est également

possible d'ajuster un niveau de bruit pour chaque groupe de cheveux, afin d'éviter que la chevelure ne présente une trop grande régularité, et donc qu'elle ne manque de naturel (voir Figure 1.21, à gauche).

Dans la méthode de Choe et Ko [CK05a], la chevelure est modélisée par mèches, et la forme globale de chaque mèche est déterminée par la forme de son squelette, appelé *cheveu maître*. La forme du cheveu maître se décompose selon deux niveaux : une forme globale, linéaire par morceaux, qui donne l'allure générale du squelette, et des détails. Ces détails sont construits à partir d'un cheveu *prototype* en utilisant une chaîne de Markov dans laquelle le degré de similarité entre le cheveu maître et le prototype sont contrôlés par le biais d'une distribution de Gibbs. Au sein d'une mèche, le degré d'auto-similarité entre cheveux est contrôlé par plusieurs paramètres aléatoires, tels que la longueur ou la distance au cheveu maître, ainsi que par l'ajout de bruit pour rompre les répétitions de géométrie. Aussi, les coiffures obtenues sont globalement cohérentes (car il y a beaucoup d'auto-similarités à la fois entre les mèches, et entre les cheveux), tout en présentant des variations perceptibles très fines qui leur confèrent beaucoup de réalisme (voir Figure 1.21, à droite).



FIG. 1.21: *Ondulations et boucles générées dans la chevelure de manière procédurale par Yu [Yu01] (à gauche) et Choe et Ko [CK05a] (à droite).*

c) Méthodes multirésolution

Kim et Neumann [KN02] représentent une chevelure complexe grâce à une hiérarchie de cylindres généralisés, permettant ainsi à l'utilisateur de sélectionner le niveau de détail avec lequel il va travailler et jouer sur la forme. Les niveaux de détail grossiers permettent de créer rapidement une forme globale pour la chevelure, tandis que les niveaux de détail plus fins permettent de contrôler directement les détails fins de la géométrie, jusqu'au niveau du cheveu individuel. Des coiffures complexes peuvent rapidement être créées par des opérations de copier-coller qui permettent de transposer un style apposé à une mèche (boucle, torsade, etc.) directement à d'autres mèches, à n'importe quel niveau de détail (voir Figure 1.22).



FIG. 1.22: *Modélisation de coiffure multirésolution par Kim et Neumann [KN02]. À gauche, la chevelure de départ. À droite, la coiffure obtenue après multiples opérations de copier-coller d'un style torsadé sur les mèches, à différents niveaux de détail.*

En utilisant une idée similaire, Wang et Yang ont étendu leur modèle de mèche initial [YXYW00, XY01] à un modèle hiérarchique [WY04], dans lequel la forme des cheveux peut être modifiée sur trois niveaux de détail différents (groupe de mèches, mèche, et cheveu individuel).

Modélisation de la forme des cheveux par modèles physiques

Les approches géométriques permettent de créer relativement simplement des coiffures complexes et très variées. Cependant, avec ce type d'approche, c'est l'utilisateur qui doit entièrement modéliser une coiffure à la main, ce qui peut s'avérer long voire fastidieux. De plus, si de telles coiffures sont en général assez bien conçues pour être animées ultérieurement par positions clef (méthode d'animation toutefois très limitée), elles ne sont pas directement adaptées à une animation dynamique par modèle physique (méthode d'animation la plus performante), l'identification des paramètres physiques n'étant pas triviale.

Certes, les approches générant des coiffures par modèles physiques sont moins flexibles et moins facilement contrôlables par des artistes, mais elles présentent tout de même un certain nombre d'avantages : d'abord, elles automatisent en partie la phase de modélisation ; ensuite, elles facilitent l'animation ultérieure de la coiffure par modèle physique ; enfin, elles permettent beaucoup plus facilement de prédire l'influence de tel ou tel facteur extérieur (humidité, produit cosmétique, etc.) sur la forme de la coiffure.

a) Statique des poutres

En résistance des matériaux, un cas d'étude classique est la statique d'une poutre dont l'un des deux bords est encastré dans un support, et l'autre bord libre. Anjyo *et al.* [AUK92] se sont inspirés de ces travaux pour générer la forme d'un cheveu individuel encastré dans le cuir chevelu. En considérant que la seule force extérieure appliquée est la gravité, ils utilisent une équation linéaire simplifiée issue de la statique des poutres, définissant en chaque point du cheveu l'angle de flexion à l'équilibre. L'équation utilisée étant linéaire (et valable en théorie uniquement pour les petites déformations), cette méthode ne permet pas de synthétiser correctement la pousse des cheveux sous l'influence de la gravité. En particulier, dans cette approche, un cheveu implanté verticalement pousse tout droit, sans jamais tomber, et il faut ajouter en permanence d'autres forces au système (forces artificielles, appelées forces *coiffantes*) pour obtenir un tombé de cheveux réaliste (voir Section 3 au Chapitre 6). En combinant cette technique pseudo-physique avec une gestion des collisions entre les cheveux et la tête, la possibilité d'ajouter d'autres forces extérieures pour perturber la forme du cheveu, ainsi qu'un outil de coupe, les auteurs parviennent à générer différents styles de coiffures lisses.

Lee et Ko [LK01] ont exploité le même modèle physique pour générer la forme globale des cheveux, mais dans sa version dynamique - présentée en Section 3.2. Leur travail étend la méthode d'Anjyo *et al.* en tenant cette fois-ci compte des interactions entre cheveux ; cette méthode d'interactions est présentée dans la suite. De plus, des ondulations peuvent être créées de manière géométrique, et un outil de coupe est également disponible.

Notons toutefois que dans ces deux approches, l'opération de coupe n'est *pas* physique (*i.e.* elle ne correspond pas à la suppression de matière) : elle est simplement effectuée lors de la phase de rendu des primitives géométriques composant les cheveux (les segments marqués comme étant situés en dessous d'une certaine altitude de coupe ne sont tout simplement pas affichés). De ce fait, la forme du haut de la coiffure est la même quel que soit le niveau où les cheveux sont "coupés", contrairement à ce qui se produit pour des cheveux réels.

b) Champs de vecteurs

Les autres approches physiques visant à modéliser des coiffures se basent pratiquement toutes sur la définition d'un champ de vecteurs dans l'espace pour générer la forme de la chevelure [Sta95, HMT00, Yu01, CK05a]. Ces champs de vecteurs peuvent être en 2D ou en 3D, statiques ou dynamiques. Finalement, ces méthodes étendent le concept de forces *coiffantes* déjà utilisées dans les méthodes présentées au paragraphe précédent.

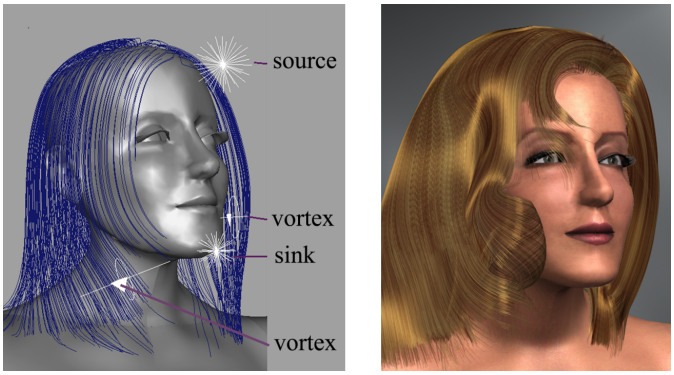


FIG. 1.23: *Modélisation de la chevelure comme un milieu fluide [HMT00].*

Stam [Sta95] a montré qu'une chevelure pouvait être modélisée à partir de particules évoluant dans un champ continu dynamique. Une telle particule a une durée de vie fixée, et chaque cheveu correspond au trajet effectué par une particule au cours de son existence. Ainsi, la longueur de la chevelure peut être modifiée en jouant sur la durée de vie des particules. Les cheveux peuvent également être animés en faisant évoluer le champ de mouvement des particules au cours du temps. Les collisions entre cheveux sont automatiquement gérées par la continuité du champ de mouvement, qui imposent que les trajectoires des particules ne se croisent jamais. Pour modéliser des coiffures complexes, l'utilisateur peut perturber localement une trajectoire de particules, et ainsi créer des ondulations ou des boucles au sein de la chevelure.

Dans le même esprit, Hadap et Magnenat-Thalmann [HMT00] modélisent une chevelure par les lignes de courant d'un fluide stable en 2D s'écoulant de haut en bas, et contournant les obstacles formés par la tête et les épaules du personnage (voir Figure1.23). Là encore, la continuité du fluide garantit que les cheveux ne se croiseront pas. Des tourbillons locaux (vortex) sont utilisés pour perturber localement le fluide et créer des boucles. De plus, un modèle empirique au-dessus du modèle physique permet d'ajouter aux résultats obtenus un bruit contrôlé, afin d'obtenir des coiffures moins lisses, et plus proches de la réalité. Par la suite, cette approche été étendue à la simulation dynamique de chevelures (voir Section 3.2).

Afin de générer des coiffures plus complexes, tout en offrant à l'utilisateur une interface interactive avec un maximum de contrôle sur la forme de la coiffure, Yu [Yu01] propose d'utiliser des champs de vecteurs statiques en 3D. Ces champs peuvent être quelconques (pas nécessairement continus), et générés par l'utilisateur assez simplement à partir d'un certain nombre de champs élémentaires disponibles dans une bibliothèque. Chacun de ces champs, provenant pour la plupart du domaine de l'électromagnétisme, déforme la chevelure de manière spécifique (répulsion, enroulement autour d'un axe, création d'ondulations, etc.). En combinant ces champs élémentaires et en leur affectant à chacun une influence locale sur la chevelure, il est ainsi possible de créer un champ global en 3D, relativement complexe, qui représente les directions des cheveux dans l'espace. Chaque cheveu est ensuite automatiquement tracé depuis la racine comme une suite de segments, en suivant pas à pas la direction 3D indiquée par le champ global, jusqu'à ce que le cheveu atteigne la longueur désirée (voir Figure 1.24, à gauche).

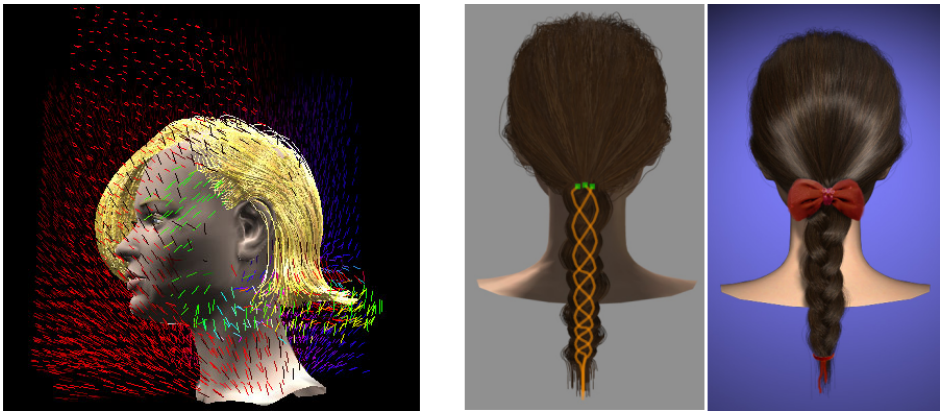


FIG. 1.24: *Champ de vecteurs 3D pour définir le style de la coiffure [Yu01] (à gauche) et modélisation d'une tresse par des contraintes de trajectoire [CK05a] (à droite).*

Choe et Ko [CK05a] utilisent également des champs de vecteurs 3D, mais tiennent compte de l'élasticité naturelle des cheveux pour générer des coiffures. Chaque cheveu est modélisé comme une suite de segments, et pour chaque cheveu, l'algorithme calcule, *via* une minimisation d'énergie, les angles entre morceaux de droite qui tiennent compte au mieux à la fois de l'influence du champ de vecteurs global, et de la tendance des cheveux à recouvrer leur forme naturelle au repos. Une autre caractéristique importante de cette méthode est la possibilité pour l'utilisateur de définir des *contraintes* pour modéliser la chevelure. La spécification d'une contrainte produit localement un champ de vecteurs contraint, qui va se superposer au champ de vecteurs global. Le même algorithme de minimisation d'énergie est alors appliqué pour calculer la déformation de la chevelure en présence d'une contrainte. En pratique, l'utilisateur peut spécifier trois types de contraintes : des contraintes ponctuelles, des contraintes de trajectoire, ou des contraintes directionnelles. De telles contraintes s'avèrent très utiles pour créer des coiffures complexes formées d'une queue de cheval, d'un chignon, de tresses, de couettes, etc. (voir Figure 1.24, à droite).

c) Ajout de volume dans la chevelure générée

Alors que la plupart des méthodes géométriques confèrent de manière intrinsèque du volume à la chevelure - par l'utilisation de primitives géométriques volumiques dans la modélisation - il n'en est pas de même pour les méthodes par modèle physique, qui doivent explicitement traiter les interactions entre cheveux (on modélise directement les forces appliquées) afin de générer des coiffures présentant un volume raisonnable.

Nous avons déjà vu que les approches qui représentent la chevelure comme un milieu fluide [Sta95, HMT00] tiennent compte implicitement de ces interactions dans leur modèle, dans la mesure où les lignes de courant du fluide ne peuvent se croiser.

La détection de collisions entre cheveux étant une opération très coûteuse, et donc peu compatible avec la contrainte d'interactivité imposée par un système de modélisation de coiffures, Lee *et al.* ont développé une technique qui ajoute du volume à la coiffure sans se préoccuper des collisions exactes se produisant entre cheveux. Le principe repose sur l'hypothèse suivante : les cheveux plantés haut sur le crâne doivent toujours recouvrir les cheveux plantés plus bas. L'idée consiste alors à créer une série d'enveloppes autour de la tête, en pelures d'oignon, et à détecter la collision de chaque cheveu avec l'enveloppe correspondant à l'altitude du cheveu (plus un cheveu est haut, plus on le teste avec une grande enveloppe). Cette méthode n'est autre que l'extension de l'algorithme de détection de collisions entre les cheveux et la tête. Bien sûr, elle ne marche que dans le cas où la tête reste statique et orientée verticalement.

Choe et Ko [CK05a], quant-à-eux, considèrent la densité de cheveux dans l'espace comme un indicateur de collisions : lorsque la densité d'une région de l'espace atteint un certain seuil, une collision est détectée et la chevelure est alors forcée d'occuper un plus grand volume.

D'autres méthodes d'interactions entre cheveux, spécifiques à l'animation, seront présentées en Section 3.2.

d) Modélisation des effets de l'eau et des produits coiffants

Comme nous l'avons vu en Section 1.5, l'eau et les produits coiffants influent beaucoup sur la forme des cheveux, et sur le volume total de la chevelure. Les approches existantes qui simulent ces effets utilisent toutes un modèle dynamique de cheveux [LK01, CJY02, WGL04]. Ward *et al.* [WGL04] utilisent un système de chaînes de particules liées par des ressorts pour représenter une chevelure, et jouent sur la masse des particules et sur la raideur des ressorts pour simuler l'état mouillé des cheveux ou l'effet de produits coiffants. Dans le cas des cheveux mouillés, les particules composant chaque cheveu voient leur masse augmenter de 45%, et de manière très étonnante, la raideur des ressorts est également augmentée, alors que dans la réalité, la raideur des cheveux diminue fortement lorsque ceux-ci sont mouillés ! Le volume des mèches est également réduit de manière procédurale lorsque les cheveux sont mouillés.

Les autres approches étudient plutôt le comportement dynamique d'une chevelure mouillée, aussi les présenterons-nous plus en détail en Section 3.2.



FIG. 1.25: *Comparaison entre des cheveux secs (a) et mouillés (b) [WGL04].*

Modélisation de la forme des cheveux par des méthodes à base d'images

Les méthodes de création de coiffure par modèle physique automatisent en partie la phase de création de coiffure, et donc permettent d'accélérer notablement ce processus. Cependant, la plupart de ces méthodes sont incapables de générer automatiquement la géométrie fine d'une chevelure donnée (boucles, ondulations, variations aléatoires, etc.), et ont donc recours, comme nous l'avons vu, à des méthodes procédurales géométriques pour ajouter ces détails. Afin d'automatiser la création en 3D d'une coiffure (ou plutôt, la partie visible d'une coiffure), des chercheurs ont proposé récemment un tout nouveau type d'approche basée sur la reconstruction de cheveux à partir de photographies.

Kong *et al.* [KTN97] ont été les premiers à utiliser des photographies de chevelures pour faire de la reconstruction automatique en 3D. Cependant, leur approche ne permet de reconstituer, à partir de plusieurs points de vue, que la géométrie du volume occupé par la chevelure, tandis que les cheveux individuels sont générés au sein de ce volume de manière heuristique. La méthode ne garantit donc aucune ressemblance entre les orientations des cheveux générés et celles des vrais cheveux.

Grabli *et al.* [GSML02] ont alors proposé une nouvelle idée : celle d'analyser la réflexion de la lumière sur les chevelures prises en photo pour en déduire l'orientation locale des cheveux en 3D. Pour

cela, ils travaillent avec un seul point de vue, mais utilisent une source lumineuse mobile et contrôlée, ce qui leur permet de générer plusieurs images d'une même chevelure éclairée différemment. Ces images sont ensuite analysées et filtrées pour déterminer les orientations 3D de cheveux qui sont les plus plausibles. Mais cette technique ne parvient qu'à reconstituer la chevelure de manière partielle. Paris *et al.* [PBS04] on étendu cette approche pour générer une reconstruction plus complète. Dans cette méthode, plusieurs points de vue sont considérés, et la stratégie consiste à tester plusieurs filtres orientés par pixel, et à choisir l'orientation locale donnée par le filtre le plus fiable à cet endroit précis. Cette technique permet de reconstruire de manière fidèle toute la partie visible de la chevelure (voir Figure 1.26), mais bien évidemment, les parties cachées (cheveux près du crâne, boucles de cheveux, etc.) ne peuvent pas être reconstituées par ce type de méthodes.



FIG. 1.26: *Cheveux capturés à partir de photographies [PBS04].*

Wei *et al.* ont récemment amélioré la flexibilité de cette approche, en tirant parti des contraintes géométriques inhérentes aux différents points de vue utilisés [WOQS05]. Avec cette nouvelle méthode, il n'est plus nécessaire, pour capturer la géométrie de la chevelure, de mettre en place un protocole expérimental complexe comme c'était le cas dans [PBS04], ni de contrôler scrupuleusement les conditions d'éclairage de la chevelure.

3.2 Animation de chevelures



FIG. 1.27: *Chevelures réelles en mouvement (©ocregister.com).*

Si de nets progrès ont été réalisés ces dernière années pour l'animation de personnages virtuels, la simulation dynamique de leurs chevelures reste encore problématique. Une chevelure humaine est en effet composée d'environ 150 000 cheveux en interaction les uns avec les autres : l'animation synthétique d'un système aussi complexe est donc très difficile, autant sur le plan du réalisme souhaité que sur la gestion de l'efficacité des simulations. La plupart des méthodes qui existaient lorsque cette thèse a débuté restaient limitées à des animations de chevelures très lisses, pour des mouvements simples. Depuis, de nombreuses méthodes adaptatives ont fait leur apparition, et ont considérablement amélioré l'efficacité des simulations. Par contre, on est encore loin de pouvoir réaliser des animations physiquement réalistes de cheveux.

Une des principales difficultés provient de la nature anisotrope du cheveu que nous avons décrite en Section 1.5 : un cheveu peut facilement se courber, mais il est très peu extensible ; en outre, un cheveu tend à retrouver sa forme initiale une fois que les contraintes exercées sur lui disparaissent. Enfin, les cheveux sont des objets très fins et très légers, en contact permanent ou transitoire les uns avec les autres. Il paraît donc impossible de prendre en compte, en des temps raisonnables de calcul, tous les mouvements individuels ainsi que les interactions se produisant au sein de la chevelure. De plus, la nature exacte des interactions entre cheveux ainsi que les phénomènes électrostatiques sont encore relativement peu connus. Aucun modèle macroscopique de ces interactions, même théorique, n'est disponible dans la littérature.

Animation de cheveux individuels

Trois familles de modèles ont été proposées en informatique graphique pour simuler la dynamique d'un cheveu individuel : les *chaînes masses-ressorts*, la *dynamique projective angulaire*, et les *chaînes de corps rigides articulés*. Chacun de ces modèles est décrit dans la suite, et évalué en termes de réalisme et de capacité à interagir avec l'extérieur.

a) Systèmes masses-ressorts

Rosenblum *et al.* [RCT91] ont présenté une des premières méthodes visant à animer des cheveux individuels. Dans cette approche, chaque cheveu est représenté comme une chaîne de particules connectées par des ressorts raides longitudinaux, ainsi que des ressorts angulaires (appelés charnières). Chaque particule possède alors trois degrés de liberté, un en translation et deux en rotation, et les ressorts angulaires modélisent la rigidité du cheveu en flexion. Cette méthode est simple et facile à implémenter, cependant elle ne tient pas compte de certaines caractéristiques importantes du cheveu, telles que sa rigidité en torsion, ou encore le fait qu'il est peu extensible. Pour restreindre les élongations longitudinales du modèle au cours de l'animation, il faut utiliser des ressorts très raides, ce qui conduit à des équations mal conditionnées, sources d'instabilités numériques. En utilisant des pas de temps très petits pour limiter ces instabilités, les auteurs sont parvenus à simuler environ 1000 cheveux, mais au prix d'un temps de calcul considérable.

Beaucoup de progrès ont été réalisés depuis dans la formulation des systèmes masses-ressorts, en particulier dans le domaine de la simulation de vêtements. Baraff et Witkin [BW98] ont montré que les schémas d'intégration implicite[6] sont bien adaptés aux problèmes raides, car ils garantissent une stabilité inconditionnelle du système, même pour des grands pas de temps. Quelques méthodes de simulation de cheveux ont ainsi utilisé, plus tard, des schémas implicites pour calculer le mouvement de chaînes masses-ressorts [WL03]. D'autres méthodes [PCP01] simulant des mèches bouclées, donc légèrement extensibles, ont pu autoriser les ressorts à être plus mous, ce qui leur a permis d'utiliser des schémas d'intégration explicites, plus simples à programmer et surtout plus efficaces que les schémas implicites.

b) Dynamique projective angulaire

L'approche la plus connue pour simuler des cheveux individuels a été proposée par Anjyo *et al.* [AUK92]. Initialement, lors de la phase de modélisation de la coiffure (voir Section 3.1), la forme au repos des cheveux est donnée par une équation simplifiée de la statique des poutres. Chaque cheveu est ensuite considéré comme une chaîne de segments rigides s_i, et son mouvement dynamique est calculé ainsi :

[6] Un rappel sur les schémas d'intégration numérique est fait au Chapitre 2.

– Chaque segment s_i est assimilé à une direction dans l'espace, et peut donc être paramétré par des coordonnées sphériques ϕ (azimut) et θ (zénith) (voir Figure 1.28, à gauche).
– La force externe **F** s'appliquant sur le segment (par exemple le poids) est projetée sur le plan P_ϕ et sur le plan P_θ, définis respectivement par les angles ϕ et θ. La projection longitudinale de la force est quant-à-elle négligée, puisqu'elle n'est pas censée affecter le segment rigide.
– Le principe fondamental de la dynamique est alors appliqué pour chacun des deux degrés de liberté ϕ et θ du segment, ce qui donne deux équations différentielles scalaires d'ordre 2, qui sont résolues numériquement à chaque pas de temps. Notons que la méthode calcule toujours la configuration des segments composant un cheveu depuis la racine vers la pointe.
– Les collisions entre les cheveux et la tête sont traitées simplement par un pseudo-champ de forces issu de la tête, cette dernière étant modélisée comme un ellipsoïde.

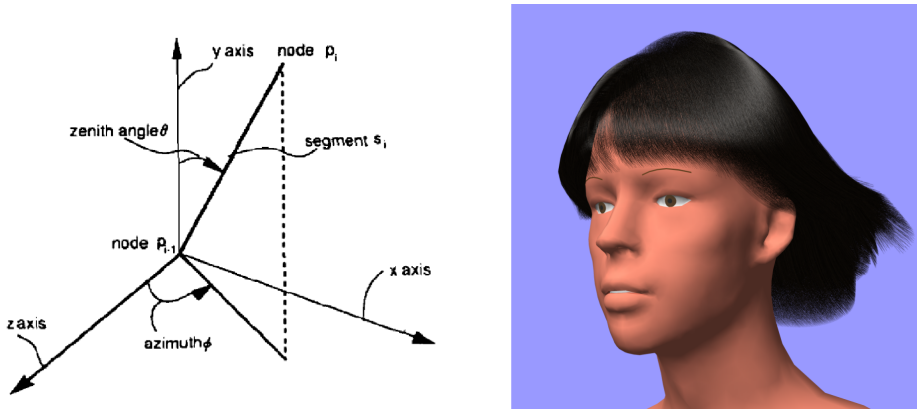


FIG. 1.28: *À gauche, le système de coordonnées polaires adapté à un segment de cheveu. À droite, la simulation de 20 000 cheveux individuels utilisant des équations dynamiques angulaires [AUK92].*

Cette méthode présente de très nombreux avantages : elle est facile à implémenter, stable, efficace (des dizaines de milliers de cheveux peuvent être simulés ainsi en des temps de calcul raisonnables), et elle produit de bons résultats sur des cheveux raides (en particulier, la condition d'inextensibilité des cheveux est intrinsèque au modèle, et la rigidité en flexion est modélisée de manière convaincante). Cela explique pourquoi tant de chercheurs ont par la suite repris cette approche [KAT93, DMTKT93, RH96, LK01, WLL+03], en particulier pour animer des groupes de cheveux.

Cependant, comme elle simplifie tout de même beaucoup la physique du cheveu (par exemple, elle ne modélise pas le phénomène de torsion du cheveu, ni l'influence de la partie inférieure du cheveu sur la partie supérieure), cette méthode peut générer des comportements irréalistes de la chevelure, en particulier dans le cas de collisions.

c) Chaîne de corps articulés

Plusieurs approches ont animé des cheveux individuels en simulant la dynamique de chaînes articulées [HMT01, CJY02]. Plus complexe que l'approche précédente, cette approche modélise aussi plus fidèlement la physique des cheveux, en ce sens que les contraintes internes au cheveu sont traitées de manière bilatérale (la partie supérieure du cheveu a une influence sur la partie inférieure, et réciproquement). De plus, les systèmes de chaînes articulées sont bien connus dans le domaine de la robotique, et des algorithmes efficaces ont déjà été mis au point depuis un certain temps pour simuler la dynamique de tels systèmes [Fea87].

Hadap et Magnenat-Thalmann [HMT00] ont proposé un modèle dynamique de cheveux hybride tenant compte à la fois du comportement individuel des cheveux et de la complexité des interactions se produisant entre cheveux. La chevelure est globalement considérée comme un milieu continu pour la

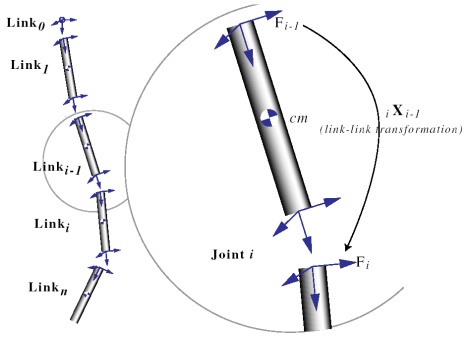


FIG. 1.29: *Cheveu défini comme une chaîne articulée ouverte [HMT01].*

gestion des interactions (voir Section suivante), tandis que quelques cheveux individuels sont simulés pour accroître le réalisme visuel. Chaque cheveu est représenté à l'aide d'une chaîne articulée ouverte, paramétrée par ses coordonnées réduites (ou généralisées), afin de ne conserver que les degrés de liberté correspondant à la courbure et à la torsion (l'étirement et la compression sont interdits). Par conséquent, cela revient à modéliser chaque cheveu par un ensemble de segments rigides connectés entre eux par des liaisons sphériques, comportant chacune trois degrés de liberté (voir Figure 1.29). En plus du poids, deux types de forces s'exercent sur chaque segment : d'une part, une force, fonction des paramètres des liaisons, qui tient compte de la rigidité du segment en flexion et en torsion ; d'autre part une force en réponse aux interactions qui se produisent dans la chevelure (collisions entre cheveux, collisions entre la chevelure et le corps, et interaction entre la chevelure et l'air), calculée par simulation du milieu continu (voir Section suivante). La dynamique du système est simulée par l'algorithme de Featherstone [Fea87], avec une complexité linéaire en nombre de segments. Chang *et al.* [CJY02] utilisent une approche similaire pour animer des cheveux directeurs guidant la chevelure.

d) Évaluation

Le tableau suivant récapitule les propriétés assurées par chacun des modèles dynamiques pour un cheveu individuel.

	Masses-ressorts	**Dynamique projective**	**Chaîne de corps rigides articulés**
Flexion	oui	oui	oui
Torsion	non	non	oui
Inextensibilité	non	oui	oui
Frisure	non	non	non
Forces externes	facile	difficile	difficile

TAB. 1.3: *Analyse des modèles dynamiques de cheveux individuels. Évaluation de chaque modèle, selon les critères suivants : rigidité en flexion, rigidité en torsion, contrainte d'inextensibilité, prise en compte de la frisure, et capacité à prendre en compte correctement des forces extérieures.*

D'après le Tableau 1.3, on remarque que le modèle de chaîne articulée permet de prendre en compte la plupart des propriétés désirées, contrairement aux autres modèles. Cependant, il est difficile d'imposer à ce modèle des contraintes extérieures - telles que des forces de contact avec un objet extérieur - de manière stable. Afin de tirer parti à la fois des modèles masses-ressorts et des chaînes articulées, Choe *et al.* [CCK05] ont récemment introduit un modèle hybride, constitué de liens rigides connectés par des ressorts angulaires mous. Ce modèle permet une intégration implicite (et donc

stable) de la dynamique, et une prise en compte robuste des contraintes entre les cheveux et le corps du personnage. Cependant, la contrainte d'inextensibilité n'est pas garantie par cette méthode.

Enfin, remarquons que même si certaines d'entre elles peuvent théoriquement modéliser un cheveu avec une forme au repos non rectiligne, toutes les approches précédentes ont été utilisées pour représenter des chaînes "droites", très certainement à cause de la difficulté à prendre en compte de manière stable des raideurs importantes en flexion et en torsion. Typiquement, aucun de ces modèles n'a permis de représenter ni d'animer précisément des cheveux naturellement bouclés.

Hypothèse de milieu continu

Une chevelure humaine est certes composée d'un très grand nombre de cheveux, cependant on peut remarquer que les cheveux ne se comportent pas indépendamment les uns des autres. Aussi, certaines approches considèrent que la chevelure présente un cohésion *globale* au cours du mouvement, ce qui leur permet de modéliser la chevelure comme un milieu continu, et au passage de réduire considérablement la complexité du système à animer.

a) Chevelure simulée comme un milieu fluide

Hadap et Magnenat-Thalmann [HMT01] gèrent la complexité des interactions entre cheveux, entre les cheveux et l'air, et entre les cheveux et le corps en traitant l'ensemble de la chevelure comme un milieu continu régi par les lois de la dynamique des fluides. Ce modèle hybride est composé d'un nombre limité de cheveux individuels simulés comme des chaînes articulées, plongés en quelque sorte dans un milieu continu représenté par des SPH[7], et soumis aux lois de la dynamique des fluides. Les interactions entre les cheveux individuels et le fluide environnant servent ainsi à modéliser les interactions se produisant au sein de la chevelure. Le mouvement complet de la chevelure se compose donc d'un mouvement global, régi par la dynamique des fluides, et du mouvement à plus fine échelle de quelques cheveux individuels visant à accroître le réalisme visuel de l'animation. Le résultat produit est assez convaincant, dans la mesure où le volume de la chevelure est correctement préservé au cours d'une animation.

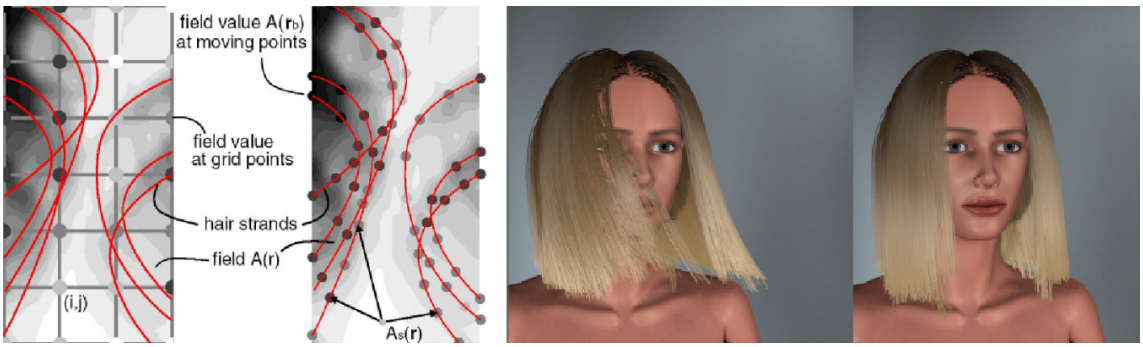


FIG. 1.30: *Chevelure représentée comme un milieu continu par Hadap et Magnenat-Thalmann [HMT01]. a) Points de vue eulérien et lagrangien. b) Animation d'une chevelure par [HMT01].*

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle conduit à des animations de chevelures très lisses, où n'apparaissent pas les discontinuités que l'on observe dans le cas réel. Récemment, Bando *et al.* [BCN03] se sont inspirés de cette idée de milieu continu pour la chevelure en l'étendant à un modèle adaptatif. Cette méthode est présentée dans la suite.

[7] Smoothed Particle Hydrodynamics. Ce modèle est expliqué au Chapitre 2.



FIG. 1.31: *À gauche, les particules définissant les cheveux, les segments de droite indiquent l'orientation des particules. À droite, l'animation par des mouvements de tête de la chevelure ainsi représentée [BCN03].*

b) Interpolation de la chevelure autour de quelques cheveux directeurs

Si l'on considère que la chevelure présente une cohésion *globale* dans son aspect pendant le mouvement, on peut alors se contenter d'animer uniquement quelques cheveux directeurs, puis d'étendre ce mouvement au reste de la chevelure par interpolation. Cette technique a été proposée il y a une dizaine d'années [DMTKT93]. L'inconvénient est qu'elle ne s'applique qu'à des chevelures très lisses, et qui, encore une fois, ne présentent aucune discontinuité lors du mouvement. En outre, cette méthode pose le problème des collisions entre la chevelure et le corps, puisque seuls les quelques cheveux directeurs sont capables de détecter une interpénétration. Chang *et al.* [CJY02] utilisent des bandes de triangles reliant les cheveux directeurs pour pallier à cet inconvénient. La gestion des collisions entre cheveux consiste alors simplement à traiter les interactions pouvant survenir entre les cheveux guide et ces triangles intermédiaires, ce qui est peu coûteux. De plus, des cheveux guide sont automatiquement ajoutés de manière adaptative afin de garantir que l'ensemble des cheveux guide reste convenablement distribué durant le mouvement.

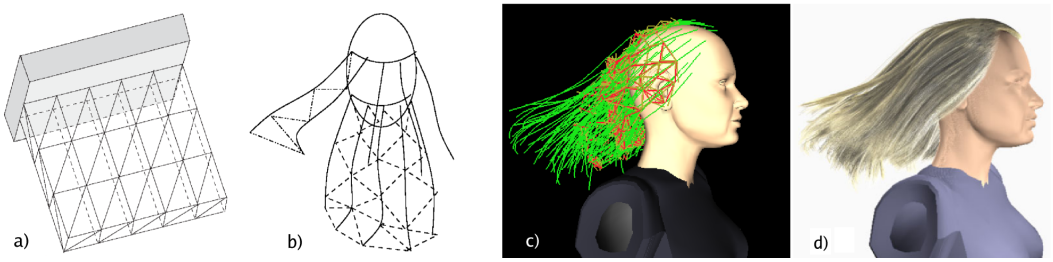


FIG. 1.32: *À gauche, les bandes de triangles utilisées pour la détection de collision, dans le cas (a) d'une brosse et (b) d'une chevelure. À droite, le modèle épars en (c) de cheveux composé de liens statiques, et l'image correspondante en (d) avec le rendu de cheveux denses [CJY02].*

Chevelure animée comme un ensemble de mèches disjointes

L'hypothèse selon laquelle la chevelure est un milieu continu est discutable : en effet on peut remarquer que toute chevelure, aussi lisse soit-elle, peut subir des discontinuités dans sa forme, au repos aussi bien qu'en mouvement (voir Figure 1.34, à gauche).

Ainsi, une autre idée est de considérer que la chevelure présente non pas une continuité globale, mais des cohésions internes *locales*. La chevelure est alors modélisée comme un ensemble de primitives géométriques appelées *mèches*, que l'on anime séparément. Évidemment, cette modélisation permet aussi de réduire le nombre d'éléments individuels à animer, tout en gardant une certaine com-

plexité pour la chevelure. Plusieurs travaux se sont basés sur cette approche, certains simulant un nombre réduit de mèches grossières [FS01], d'autres utilisant des mèches surfaciques [KH00, KH01], ou volumiques [PCP02, NT04], ces mèches pouvant être déformables ou rigides.

Afin de traiter les interactions complexes se produisant entre cheveux au cours de mouvements importants, Plante *et al.* [PCP01] ont introduit un modèle de mèche à plusieurs couches. Dans ce modèle, appelé *modèle d'interactions anisotropes*, les collisions entre mèches sont traitées de deux manières différentes, en fonction de l'orientation des mèches en jeu (voir Figure 1.33) :

- Si les mèches sont quasi-parallèles, on considère qu'il n'y a pas véritablement collision, mais plutôt une continuité dans le mouvement. Les mèches s'interpénètrent, et sont soumises à des forces de frottement visqueux.
- Si les mèches ont des orientations différentes, on considère qu'il y a collision, avec discontinuité dans le mouvement. Les deux mèches se repoussent, de manière très dissipative (pas de rebond).

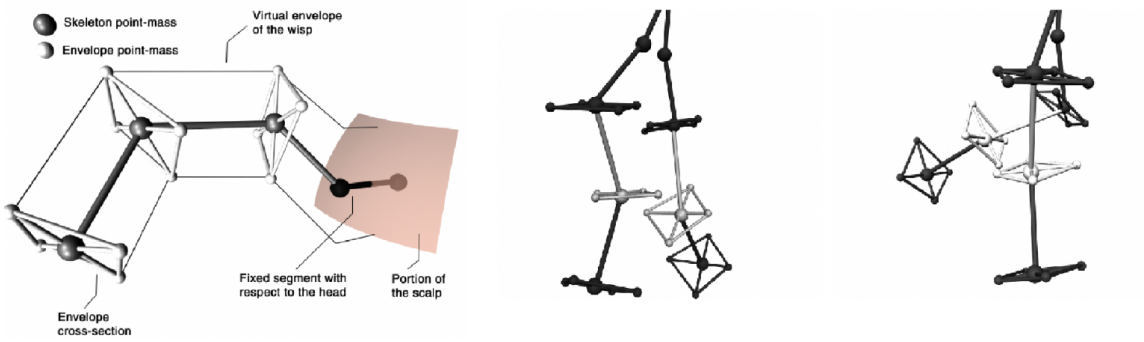


FIG. 1.33: *À gauche, éléments définissant une mèche volumique déformable [PCP01]. Au centre, deux mèches quasi-parallèles en interpénétration, soumises à des frottements visqueux. À droite, collision entre deux mèches non parallèles.*



FIG. 1.34: *Le modèle de mèche en couches [PCP01] (à droite) capture à la fois la continuité globale et les discontinuités locales que l'on peut observer dans une vraie chevelure en mouvement (à gauche).*

Cependant toutes ces méthodes sont loin d'être interactives. À titre d'exemple, les simulations réalisées par Plante *et al.* ont nécessité un temps de calcul d'environ 40 secondes par image, soit 1000 fois plus que ce qu'il faudrait au minimum pour être en temps-réel.

Méthodes d'animation multirésolution

Toutes les méthodes précédentes qui tiennent compte des interactions entre cheveux sont loin d'être interactives. Récemment, des méthodes adaptatives ont été mises au point afin de minimiser les temps de calcul de simulation tout en préservant au maximum le réalisme.

Ward *et al.* [WLL+03] modélisent une chevelure en utilisant trois niveaux de détail géométriques : des bandes de cheveux 2D au niveau le plus grossier, des groupes de cheveux 3D au niveau intermédiaire, et des cheveux individuels au niveau le plus fin. Les transitions entre ces niveaux de détail sont gérées dynamiquement au cours du mouvement en fonction de certains critères visuels, comme la position de la caméra par exemple. Cette méthode s'avère efficace, en particulier pour l'étape de rendu.

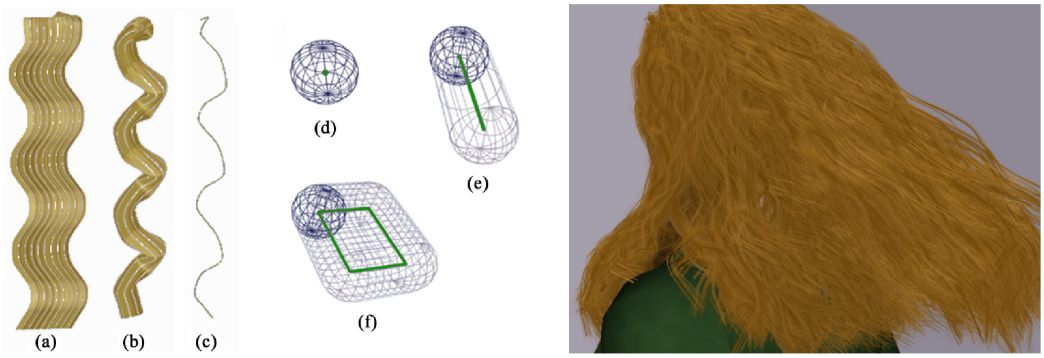


FIG. 1.35: *Représentation par niveaux de détail de la chevelure [WLL+03]. À gauche : (a) bande de cheveux 2D, (b) groupe de cheveux 3D, (c) cheveu individuel, et algorithme de balayage de sphères pour la détection de collision : (d) balayage sur un point, (e) balayage sur une ligne, (f) balayage sur un rectangle [WLL+03]. À droite, cheveux longs et bouclés flottant dans le vent, représentés par différents niveaux de détail.*

Bando *et al.* [BCN03] ont modélisé la chevelure par un ensemble de particules SPH en interaction les unes avec les autres, chacune des interactions s'adaptant au cours du mouvement (voir Figure 1.31). Dans ce modèle, une particule représente une certaine quantité de chevelure, munie d'une orientation (l'orientation d'une particule étant l'orientation moyenne de l'ensemble des cheveux représentés par la particule). Initialement, on construit des chaînes de connexion entre particules voisines alignées selon l'orientation des cheveux : deux particules voisines ayant des directions proches, et telles que leurs positions sont également alignées selon cette direction, sont reliées par un ressort (d'autant plus raide que l'alignement est important). Cette configuration initiale est préservée tout au long du mouvement, puisqu'elle traduit la cohérence spatiale des interactions entre particules. Au cours du mouvement, chaque particule est susceptible en plus d'interagir avec des particules appartenant à son voisinage courant (différent du voisinage initial). La méthode propose de gérer ces interactions dynamiques entre cheveux en établissant des liens entre particules proches, liens qui disparaissent lorsque les deux particules ne sont plus voisines l'une de l'autre. La méthode facilite ainsi les séparations et regroupements transversaux de cheveux, tout en garantissant une longueur constante pour la chevelure. À chaque pas de temps, la recherche des voisinages de chaque particule est effectuée de manière efficace grâce à une grille de voxels.

La méthode que nous présentons au Chapitre 3 relève également d'une stratégie multirésolution, et se concentre sur la représentation de la chevelure sous la forme d'une arborescence adaptative, dont nous expliquerons les avantages. Publiée en 2003 au Symposium on Computer Animation [BKCN03], cette approche a été conçue indépendamment des travaux cités plus haut.

3.3 Rendu de cheveux



FIG. 1.36: *Effets de la lumière sur des cheveux réels de couleurs variées (©J. Gray).*

Pour rendre une chevelure humaine de manière réaliste, il est nécessaire de prendre en compte à la fois les propriétés optiques de chaque fibre capillaire, que nous appellerons *propriétés locales* d'illumination, ainsi que les interactions lumineuses se produisant entre les cheveux, appelées *propriétés globales*.

Avant toute chose, il faut convenir d'une représentation géométrique appropriée de la chevelure, sur laquelle on puisse ensuite s'appuyer pour en générer le rendu. La chevelure peut être représentée soit de manière *explicite*, soit de manière *implicite*. Nous décrivons ensuite les propriétés de dispersion de la lumière caractéristiques d'une fibre capillaire. Cette section passe en revue les différents modèles qui ont été proposés pour rendre compte fidèlement de ces propriétés optiques locales qui traduisent la nature des reflets de la chevelure. Les propriétés globales concernent quant-à-elles la manière dont les cheveux se projettent mutuellement de l'ombre ; ce phénomène d'auto-ombrage est essentiel puisqu'il contribue de façon primordiale à l'impression de volume d'une chevelure.

Représentation des cheveux pour le rendu

Les choix possibles pour un algorithme de rendu de cheveux dépendent largement de la représentation sous-jacente utilisée pour modéliser la géométrie des cheveux. Par exemple, les modèles explicites font appel à des algorithmes de rendu prenant en entrée des primitives géométriques telles que des segments ou des triangles, tandis que les modèles volumiques ne peuvent être rendus que *via* des algorithmes sachant gérer les représentations implicites.

a) Représentation explicite

Lorsque l'on utilise une représentation explicite pour les cheveux, cela signifie que chaque cheveu doit être tracé de manière individuelle. Un cheveu individuel se représente de manière naturelle par un cylindre incurvé. Un des premiers travaux sur le rendu de cheveux, menés par Watanabe et Suenaga [WS92] propose une représentation des cheveux par des prismes trigonaux ; dans cette représentation, chaque mèche de cheveux est vue comme une série de prismes reliés entre eux par trois faces. En attribuant une unique couleur à chaque prisme, cette méthode suppose que la variation de couleur d'un cheveu dans son épaisseur est négligeable. D'autres approches représentent les cheveux par une bande continue de triangles, chaque triangle étant toujours orienté face à la caméra. Neulander et van de Panne [NdP98] ont présenté une technique qui discrétise de manière adaptative la géométrie incurvée des cheveux et produit un ensemble de polygones dont le nombre et les dimensions varient en fonction de la distance à la caméra, de la courbure géométrique de cheveux, etc.

Lors du rendu d'une représentation explicite, des problèmes d'aliasage, causés par la nature géométrique très particulière des cheveux (un cheveu est extrêmement fin - 0.1 mm de diamètre en moyenne), peuvent survenir. En effet, dans des conditions normales de visualisation, l'épaisseur d'un cheveu projeté sur l'écran est beaucoup plus petite que la taille d'un pixel. Cette propriété est la cause d'importants problèmes de sous-échantillonnage dans les algorithmes de rendu de géométrie polygonale. Tous les algorithmes de rendu basés sur une géométrie explicite déterminent la couleur d'un pixel (ou la profondeur) en fonction d'un nombre limité d'échantillons discrets. Le sous-échantillonnage crée des changements brutaux de couleurs, ou encore des arêtes bruitées autour de la chevelure. En augmentant le nombre de primitives utilisées, on parvient à réduire le problème, mais avec un taux faible de convergence [Mit96], et par conséquent, au prix d'algorithmes lents.

LeBlanc *et al.* [LTT91] ont résolu le problème en effectuant un mélange approprié des couleurs des pixels, à l'aide de techniques de "blender buffer". Dans cette méthode, chaque cheveu est dessiné comme une ligne brisée, et la couleur ombrée est mélangée à un pixel buffer. Puis étant donné qu'un mélange à base de transparence alpha est utilisé, l'ordre de tracer est soigneusement respecté, en affichant d'abord les polygones loin de la caméra. Kim et Neumann [KN02] ont également utilisé une approximation du tri par visibilité afin de rendre des cheveux avec une valeur de transparence.

b) Représentation implicite

Les textures volumiques (ou *texels*) [KK89, Ney98] évitent le problème de l'aliasage en utilisant des fonctions d'ombrage pré-filtrées. On considère comme primitive élémentaire une cellule volumique dont différentes résolutions peuvent facilement être pré-calculées pour une utilisation multi-échelle ensuite. Le coût du lancer de rayon nécessaire pour rendre ces volumes est relativement raisonnable pour des cheveux courts ou pour de la fourrure, mais peut devenir très lourd dans le cas de longs cheveux. De plus, si les cheveux sont animés, de tels volumes doivent être mis à jour et donc recalculés à chaque pas de temps, ce qui amenuise nettement les avantages du pré-filtrage initial.

La méthode de rendu appliquée sur le modèle de mèches à base de cylindres généralisés de Yang *et al.* [YXYW00] exploite la géométrie implicite de la chevelure. Chaque groupe de cheveu est tout d'abord approché par une enveloppe englobante polygonale. Lorsqu'un rayon frappe cette surface polygonale, les fonctions de densité prédéfinies sont utilisées pour calculer la densité accumulée. En approximant les détails à haute fréquence par des fonctions de densité, la méthode génère ainsi des images de chevelures antialiasées.

Propriétés de dispersion de la lumière dans les cheveux

La beauté d'une chevelure est essentiellement liée à sa brillance si particulière, causée par des reflets caractéristiques émis par chaque fibre individuelle sous l'effet de la lumière. Pour modéliser finement l'apparence d'une chevelure, il est ainsi indispensable de rendre compte de la manière dont chaque fibre capillaire renvoie ou absorbe la lumière incidente. Un tel modèle représente, pour le rendu de cheveux, ce que les modèles de réflexion de surface (ou modèles locaux) sont au rendu traditionnel de surfaces.

a) Propriétés optiques du cheveu

La structure interne du cheveu a déjà été présentée en Section 1.3. Une fibre capillaire est constituée de protéines amorphes qui se comportent comme un milieu transparent, et dont l'indice de réfraction est $\eta = 1.55$ [Rob02, SGF77]. Le cortex et le canal médullaire contiennent, comme nous l'avons vu précédemment, des pigments qui absorbent la lumière, et ce de façon dépendante de la longueur d'onde. Ce sont ces pigments qui donnent leur couleur aux cheveux.

b) Notations et radiométrie

La Figure 1.37 indique les notations choisies pour étudier l'optique géométrique d'une fibre capillaire. On appelle *plan normal* le plan perpendiculaire à la fibre. On note ω_i la direction d'illumination et ω_r la direction dans laquelle on calcule (ou mesure) la lumière réfléchie. Ces deux directions sont orientées du cœur de la fibre vers l'extérieur, et sont repérées à l'aide de coordonnées sphériques. Leurs angles (algébriques) par rapport au plan normal sont respectivement notés θ_i et θ_r, et ce de sorte qu'une valeur de 0 degré représente un vecteur perpendiculaire à l'axe du cheveu. Les angles (algébriques) de rotation autour de l'axe principal du cheveu sont respectivement notés ϕ_i et ϕ_r, et l'angle de rotation relatif $\phi_i + \phi_r$ - suffisant pour caractériser la dispersion de la lumière dans le cas où l'on considère des fibres de section circulaire - est noté $\Delta\phi$.

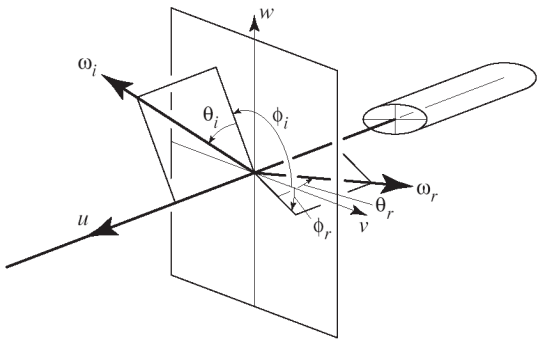


FIG. 1.37: *Notations pour l'optique géométrique dans le cheveu [MJC+03].*

Les principes bien connus de la réflexion sur une surface ne s'appliquent pas directement à la fibre, celle-ci étant plutôt traitée comme un objet linéique, à une seule dimension.

Nous ne détaillerons pas ici la formulation de la fonction de dispersion pour une fibre (que le lecteur intéressé pourra trouver dans notre état de l'art plus complet mentionné au début de ce chapitre [WBK+06]), mais nous nous attacherons surtout à reporter les principales mesures effectuées par les scientifiques concernant la dispersion de la lumière par un cheveu, et à décrire les précédents modèles développés en informatique graphique pour simuler ce phénomène.

c) Mesures de la dispersion de la lumière par un cheveu

Dans la littérature traitant de cosmétique, on peut trouver des résultats concernant la mesure, dans le plan incident, du phénomène de dispersion de la lumière à travers un cheveu. Stamm *et al.* [SGF77] ont mesuré la réflexion de la lumière issue d'une bande de fibres parallèles. Ils ont remarqué plusieurs différences notables par rapport à ce qui était prédit par la théorie sur la dispersion à travers un objet cylindrique : au lieu d'observer un unique pic spéculaire, dans la direction symétrique du faisceau incident, ils ont pu déceler la présence de deux pics spéculaires de part et d'autre de la direction spéculaire théorique, et l'apparition d'un pic spéculaire très net pour un faisceau incident rasant. Les auteurs ont expliqué la présence de ces deux pics spéculaires par le fait que la surface de la fibre capillaire n'est pas lisse, mais recouverte d'écailles qui dévient les rayons lumineux : un des pics observés correspond alors à la réflexion directe des rayons incidents, tandis que le second pic correspond à la réflexion interne des rayons incidents, comme nous l'avons déjà mis en évidence sur la Figure 1.9.

Marschner *et al.* [MJC+03] ont fait part de mesures sur des fibres individuelles dans des configurations plus générales. En plus de mesures sur le plan incident, ils ont effectué des mesures sur le plan normal. Ces dernières décrivent précisément les pics déjà observés par Bustard et Smith [BS91], et expliquent notamment comments ces pics évoluent lorsque l'on fait tourner un cheveu autour de

son axe. Les auteurs évoquent ces pics sous le terme de “reflets” et présentent une simulation de dispersion par un cylindre elliptique qui prédit l'évolution de ces reflets. Des mesures supplémentaires montrent l'évolution des pics avec l'angle d'incidence, et ont permis ainsi de compléter les connaissances acquises quant à la dispersion de la lumière à travers les fibres capillaires.

d) Modèles d'illumination locale



FIG. 1.38: *Comparaison entre le modèle de Kajiya et Kay (à gauche), le modèle de Marschner (au milieu), et une chevelure réelle (à droite). Les reflets primaire et secondaire sont nettement visibles sur la photographie de droite (Figure tirée de [MJC+03]).*

Le premier et le plus répandu des modèles de dispersion de la lumière par un cheveu est celui de Kajiya et Kay, à l'origine conçu pour simuler le rendu de fourrure [KK89]. Ce modèle se caractérise par la somme de deux composantes, une composante diffuse et une composante spéculaire :

$$S(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = k_d + k_s \frac{\cos^p(\theta_i + \theta_r)}{\cos(\theta_i)}.$$

Kajiya et Kay ont calculé la composante diffuse en intégrant la radiance réfléchie à travers un cylindre opaque et diffus. Ils justifient leur composante spéculaire à l'aide de l'argument selon lequel la réflexion spéculaire idéale sur un cylindre parfait est comprise dans un cône, et donc la réflexion sur une fibre non idéale se fait dans un lobe enveloppant ce cône. On peut remarquer que ni l'intensité du pic ni l'épaisseur du lobe spéculaire ne sont dépendants de ϕ_i ni de $\Delta\phi$ (dépendance seulement en l'angle relatif $\Delta\theta = \theta_i + \theta_r$). Banks [Ban94] a présenté quelques années plus tard le même modèle, fondé sur des explications géométriques simplifiées.

Dans un autre article sur le rendu de fourrure, Goldman [Gol97] a proposé de raffiner le modèle en introduisant une dépendance azimutale à la dispersion de la lumière. Dans ce nouveau modèle, les termes diffus et spéculaires sont multipliés par un facteur f_{dir} qui s'exprime ainsi :

$$f_{dir} = 1 + a\cos\Delta\phi.$$

Kim [Kim02] a proposé un modèle alternatif pour la dépendance en $\Delta\phi$, qui tient compte de la réflexion et de la transmission à travers deux lobes en cosinus.

Marschner *et al.* [MJC+03] ont récemment proposé le modèle le plus complet et le plus physique pour l'illumination locale d'un cheveu. Leur modèle améliore l'approche de Kajiya et Kay sur deux points essentiels : d'une part, il prédit la variation de la réflexion des rayons lumineux selon la rotation ϕ autour de l'axe de la fibre, en prenant en compte la section elliptique du cheveu ; d'autre part, il modélise l'effet des écailles du cheveu sur la réflexion spéculaire et interne de la lumière, et obtient donc les deux pics spéculaires caractérisés auparavant par les mesures réelles sur le cheveu (voir Figure 1.38).

Auto-ombrage

Le phénomène d'ombres portées ou auto-ombrage contribue très nettement à conférer une apparence de *volume* à la chevelure (voir Figure 1.39). Dans le cas d'une chevelure complète, composée d'une centaine de milliers de fibres très fines et translucides, ce phénomène est d'autant plus difficile à reproduire de manière à la fois convaincante et efficace.



FIG. 1.39: *Importance de l'auto-ombrage sur l'apparence d'une chevelure. Comparaison entre des cheveux auto-ombrés (à gauche), et sans ombres portées (à droite) [LV00] (©Pixar Animation Studios).*

En général, on peut distinguer deux types d'approches pour projeter de l'ombre dans des objets volumétriques : les *cartes d'ombre 2D*, et le lancer de rayon à travers une grille de *densité volumique*.

a) Cartes d'ombre 2D (2D shadow maps)

Dans les algorithmes traditionnels utilisant des cartes de profondeur, la scène est rendue depuis le point de vue de la lumière, et la profondeur de chaque surface visible est stockée dans une *carte d'ombre 2D*. Un point donné sera dans l'ombre si la distance de ce point à sa projection sur la carte d'ombre placée à la source lumineuse est supérieure à la distance stockée au préalable à cet endroit dans la carte (correspondant à la distance entre la surface visible de la scène et ce pixel de la carte). Cet algorithme n'est pas adapté au rendu d'objets semi-transparents tels que les cheveux, puisqu'il ne permet de stocker qu'une seule profondeur par pixel de la carte. Pour gérer l'auto-ombrage d'objets translucides, Lokovic et Veach [LV00] ont proposé une extension aux cartes d'ombre traditionnelles : les *cartes profondes d'ombre (deep shadow maps)*. Pour chaque pixel de la carte, l'algorithme stocke une fonction de *transmittance* (également appelée *fonction de visibilité*), qui donne la proportion de lumière arrivant à chaque profondeur z échantillonnée le long d'un rayon lancé depuis un pixel de la carte.

Kim *et al.* ont proposé une manière pratique d'implémenter cette approche, qu'ils ont appelée *cartes d'opacité (opacity shadow maps)* [KN01], et qu'ils ont appliquée au cas du rendu de cheveux (voir Figure 1.41). Ward *et al.* [WLL$^+$03] ont combiné cette approche avec une représentation des cheveux par différents niveaux de détail, visant ainsi à optimiser l'animation et le rendu de cheveux, sans toutefois obtenir des simulations complètes (animation *et* rendu) interactives. La technique de cartes d'opacité a également été exploitée par d'autres auteurs qui ont tiré parti des nouvelles fonctionnalités des cartes graphiques pour accélérer encore la méthode, et obtenir cette fois-ci un rendu de cheveux interactif voire temps-réel [MKBR04, KHS04].

b) Rendu volumique

Le *rendu volumique* constitue une approche classique pour visualiser des ensembles de données provenant de grilles 3D [KH84]. Pour rendre des objets semi-transparents avec des ombres portées, une première étape consiste généralement à lancer des rayons depuis la source de lumière vers le volume considéré, puis à stocker la fonction d'atténuation de la lumière (dans des voxels par

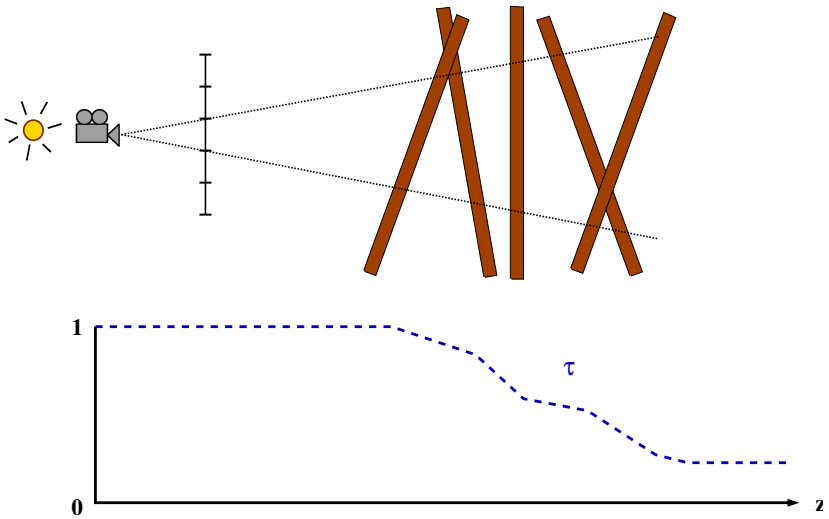


FIG. 1.40: *Algorithme des cartes profondes d'ombre (Deep Shadow Maps) [LV00]. En haut : rayon de lumière issu d'une caméra placée à la source de lumière, qui passe au travers d'un pixel de la carte d'ombre, et vient illuminer la scène. En bas : la fonction* τ *de transmittance (ou de visibilité) correspondante, stockée dans chaque pixel de la carte d'ombre comme une fonction linéaire par morceaux.*

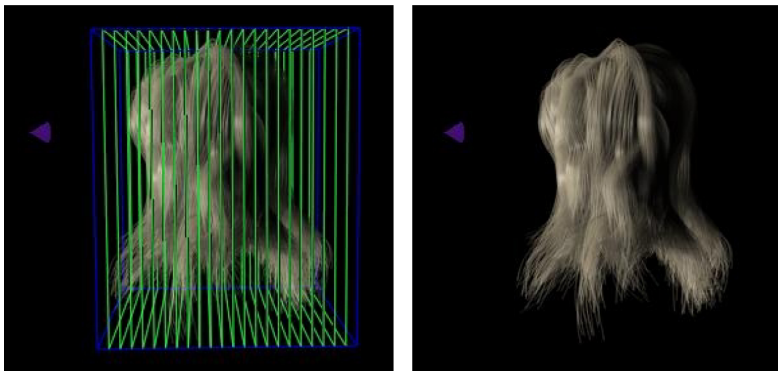


FIG. 1.41: *Algorithme des cartes d'opacité pour l'auto-ombrage (Opacity Shadow Maps) [KN01]. Dans cette technique, le volume de la chevelure est partitionné de manière uniforme, perpendiculairement à la direction de la lumière, en un ensemble de cartes 2D qui stockent les valeurs alpha (à gauche). La chevelure ombrée résultante (à droite).*

exemple). Ensuite, le rendu final est effectué par tracer de rayons depuis la caméra. De telles méthodes peuvent rendre avec précision des objets volumétriques de type nuage ou fumée [KH84], ou même des géométries fines telles que les cheveux [KK89]. Les méthodes à base de tracer de rayons génèrent souvent des résultats de bonne qualité, mais au prix de coûts prohibitifs en termes de stockage mémoire et de temps de calcul. Plus récemment, des approches dites de "splatting" ont été développées enfin d'accélérer l'ombrage et le rendu de données volumétriques [NM01, ZC03]. Le "billboard splatting", correspondant à une multi-projection de textures, a pu être appliqué avec succès au rendu de nuages [DKY+00]. Dans le cas des cheveux, ce genre d'approche s'avère effectivement efficace [BCN03], mais ne semble pas vraiment adapté au rendu des détails très fins caractéristiques d'une chevelure (voir Figure 1.31, à droite).

4 Bilan

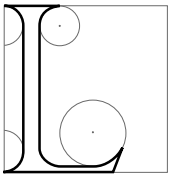
Cet état de l'art a présenté diverses études portant sur les cheveux et sur leur modélisation. Nous avons tout d'abord présenté les propriétés physiques du cheveu, dont la connaissance est essentielle si l'on veut par la suite être capable de simuler de manière fidèle le comportement mécanique ou optique des cheveux. Dans un second temps, nous nous sommes attachés à exposer brièvement les principes et objectifs spécifiques de la science capillaire et de la recherche en cosmétologie, puisque cette thèse a été en grande partie menée en partenariat avec des industriels de L'Oréal. Enfin, nous avons passé en revue les différents modèles numériques conçus dans le domaine de l'informatique graphique afin de modéliser, animer et rendre des cheveux. Il ressort de cette étude que le domaine du rendu est à ce jour le plus avancé, car il existe déjà un certain nombre de modèles déjà physiquement très réalistes, ainsi que de nombreux travaux permettant un rendu interactif de très bonne qualité pour des chevelures complètes. Par contre, la modélisation de coiffures, et surtout l'animation de chevelures, posent encore de nombreux problèmes : étant donnée la complexité des phénomènes mécaniques en jeu dans une chevelure statique ou en mouvement, le réalisme physique et l'efficacité des simulations sont encore loin d'être atteints.



FIG. 1.42: *Rendu en temps-réel de longs cheveux en mouvement, en utilisant les nouvelles fonctionnalités des cartes graphiques [ZFWH04]. Si l'apparence de la chevelure est magnifique, le mouvement (pré-calculé) des cheveux reste relativement simple, et soumis à de faibles accélérations (©NVIDIA Corporation, 2004).*

CHAPITRE 2

Modèles pour la simulation physique



ES TRAVAUX exposés au chapitre précédent ont montré que la simulation graphique des chevelures est un problème difficile. Pour l'aborder sans *a priori*, et être capable d'innover, il est important d'avoir une vision synthétique des différentes méthodes permettant de simuler des systèmes physiques, et en particulier des modèles déformables. C'est l'objet de ce chapitre.

Cet état de l'art synthétique s'appuie sur plusieurs ouvrages de référence en mécanique [LL76] et en méthodes numériques [AP88, Lam91], ainsi que sur des états de l'art présentés en informatique graphique dans différentes thèses récentes [Deb00, Noc01, Len04], habilitations à diriger des recherches [Mes02] ou encore sur les articles de recherche de Baraff [BW92, Bar96]. Nous renvoyons donc le lecteur vers l'ensemble de ces références pour plus de détails sur le sujet. Pour un état de l'art complet et récent sur l'animation de corps déformables, le lecteur pourra également se référer à [NMK+05]. Divers états de l'art récents portent de manière spécifique sur les méthodes de gestion des collisions entre objets animés [TKH+05, TMH+05]. Nous n'aborderons que très succinctement ce problème ici, en essayant de nous limiter aux approches susceptibles de nous intéresser dans le cas précis de l'animation de cheveux.

1 Problématiques

Lorsque l'on souhaite simuler le comportement *statique* (recherche des positions d'équilibre), ou encore *dynamique* d'un objet passif, la modélisation physique est d'un grand secours puisqu'elle permet, à partir des propriétés physiques de l'objet considéré (masse, module d'élasticité, etc.) et d'un certain nombre de conditions initiales, de prédire de manière réaliste les états d'équilibre ou le mouvement du système. Nous considérerons dans la suite le cas le plus général d'un système en mouvement.

Les lois de la mécanique fournissent les équations du mouvement d'un système purement mécanique (des rappels sur la mécanique de Newton et sur la mécanique de Lagrange sont donnés en

Annexe C). Ces équations sont en général des équations aux dérivées partielles qui dépendent de variables spatiales et temporelles *continues*. En effet, les systèmes considérés ont le plus souvent une répartition de masse continue, et le temps est supposé s'écouler de manière continue. Il n'existe en général pas de solution analytique à ces équations, qui doivent donc être résolues *numériquement* par l'ordinateur, capable de traiter uniquement des quantités discrètes.

Un important enjeu de la recherche en animation par modèles physiques consiste donc à trouver des moyens efficaces et précis pour *discrétiser* un tel problème, à la fois en espace et en temps. La discrétisation spatiale est traitée en Section 2. Cette discrétisation peut se faire, comme nous allons le voir, soit en amont, au niveau-même de la modélisation du système physique, soit postérieurement, au niveau des équations du mouvement. La discrétisation temporelle, abordée en Section 3, s'effectue quant-à-elle toujours à partir des équations du mouvement, et fait pour cela appel à un *schéma numérique d'intégration*.

Enfin, les objets physiques considérés ne sont en général pas isolés, et il faut être capable, là encore, de résoudre de manière discrète les éventuels contacts et collisions pouvant se produire entre l'objet et l'environnement extérieur. Ce point est abordé en Section 4, avant de dresser un bilan de toutes ces méthodes.

2 Discrétisation spatiale

Les systèmes mécaniques réels sont caractérisés par une répartition de masse plus ou moins continue dans l'espace, et par certains types de déformations dans le temps. En général, le type de modélisation spatiale que l'on souhaite utiliser pour un système donné, en vue d'une étude mécanique ou d'une simulation, est guidé par la nature de la répartition massique de l'objet considéré. Par exemple, un matériau constitué à l'échelle de l'observation de petites entités solides (sable par exemple) pourra être représenté de manière naturelle par un modèle *discret* (par exemple, un ensemble de masses ponctuelles), régi par des équations mécaniques discrètes en espace et continues en temps. À l'opposé, un matériau à répartition de masse continue (tige, feuille de papier, liquide, etc.) sera naturellement modélisé comme un système continu (linéique, surfacique ou volumique), régi par des équations mécaniques continues en espace et en temps.

Cependant, d'autres facteurs peuvent entrer en compte dans le choix d'un modèle : le degré de simplification souhaité selon le type de phénomènes ou d'effets que l'on désire simuler, la puissance de calcul disponible, etc. Ainsi, de nombreuses approches ont proposé de représenter des objets à répartition de masse continue (arbres, marionnettes, etc.) par des modèles discrets tels que des systèmes de particules [Ree83, Luc85]. Réciproquement, Zhu et Bridson [ZB05] ont récemment proposé de modéliser le sable comme un milieu continu, alors qu'un tel matériau granulaire avait auparavant été plutôt représenté comme un ensemble de grains, modélisé par un système de particules.

Nous nous intéresserons dans la suite uniquement aux systèmes déformables *à répartition de masse continue*, car ceux-ci représentent la majeure partie des objets auxquels on s'intéresse en informatique graphique. En particulier, le système de fibre capillaire entre dans ce cadre (objet à répartition de masse linéique). Une première solution pour représenter et animer simplement de tels systèmes consiste à les représenter sous la forme d'un ensemble de masses ponctuelles reliées par des forces de liaison, et sur lesquelles on applique la mécanique du point matériel. Pour une modélisation plus réaliste d'un système continu, il convient en général de faire plutôt appel à la mécanique des milieux continus, qui offre un formalisme et un ensemble de lois propres à la modélisation des déformations d'un tel objet. Dans ce second cas, cependant, la discrétisation spatiale du modèle peut apparaître comme un point délicat à traiter.

Nous avons choisi de classer les différents modèles de discrétisation spatiale utilisés en informatique graphique en trois catégories : les approches à base de *particules*, qui proposent une dis-

crétisation de la matière en un ensemble de points matériels ; les approches *nodales*, qui cherchent à discrétiser spatialement les équations continues issues de la mécanique des milieux continus ; et les approches de *déformation globale*, dont le but est d'identifier et de prendre en compte les modes caractéristiques de déformation de l'objet considéré.

2.1 Modèles à base de particules

Un modèle simple et efficace, largement utilisé en informatique graphique, consiste à répartir la masse de l'objet considéré de manière discontinue, sur un nombre fini et restreint de points, appelés *particules* ou *masses ponctuelles*. Dans ce cas, une grande simplification est introduite car les quantités mécaniques (accélérations, vitesses, forces, etc.) n'existent qu'en ces points. Le mouvement de l'objet est alors défini par l'ensemble des trajectoires suivies par chacune des particules, chaque trajectoire pouvant s'obtenir à partir des lois classiques de la mécanique du point matériel.

Selon la nature des interactions existant entre les différentes particules matérialisant l'objet considéré, on peut distinguer trois grands types de modèles basés sur cette simplification : les *modèles masses-ressorts*, les modèles génériques appelés classiquement *systèmes de particules*, et les modèles *SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics)*.

2.2 Modèle masses-ressorts

Dans ce modèle, les particules sont connectées par des ressorts à un ensemble prédéterminé de particules dites *voisines*. Le réseau de connexion ainsi formé entre les particules est généralement choisi de manière à être le plus régulier possible, afin de garantir une répartition uniforme des particules au sein du matériau considéré.

La force $\mathbf{F}_{\sum j \to i}$ exercée sur chacune des particules i par l'ensemble de ses particules voisines $j \in Vois(i)$ s'exprime alors facilement en fonction de la position $\mathbf{x}_i$ de la particule i, ainsi que des positions $\mathbf{x}_j$ des particules voisines, sous la forme d'une somme de réponses élastiques :

$$\mathbf{F}_{\sum j \to i} = \sum_{j \in Vois(i)} k_{i,j} \left(||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|| - \ell^0_{i,j} \right) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i||}$$

où $k_{i,j}$ est la raideur du ressort connectant la particule i à la particule j, et $\ell^0_{i,j}$ sa longueur au repos. On peut ajouter à la réponse élastique une force de frottement visqueux de coefficient ν_i, et proportionnelle à la vitesse $\dot{\mathbf{x}}_i$ de la particule considérée. Cet amortissement permet avant tout de réduire les vibrations du système et donc de lui garantir une meilleure stabilité.

Finalement, l'équation du mouvement pour chaque particule i peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre :

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) + \nu_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) + k_i \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, t)$$

où k_i est le coefficient élastique qui s'obtient à partir des $k_{i,j}$, et $\mathbf{F}$ regroupe l'ensemble des termes restants, comprenant les forces extérieures au système telles que la gravité ou le frottement de l'air.

Les modèles masses-ressorts ont connu très tôt un vif succès au sein de la communauté en informatique graphique, grâce à leur simplicité d'implémentation et aux bons résultats qu'ils produisent pour la simulation d'objets suffisamment mous. Ils ont par exemple été appliqués à l'animation de visages [PB81], ou de marionnettes [Luc85]. Cependant, les modèles masses-ressorts posent des problèmes lorsque l'on souhaite simuler des matériaux peu extensibles, comme des vêtements par exemple. Pour résoudre ce type de problème "raide", Baraff a proposé d'utiliser un schéma implicite d'intégration en temps, garantissant ainsi la stabilité de la résolution numérique (voir Section 3).

Comme indiqué au Chapitre 1, Rosenblum *et al.* [RCT91] ont été les premiers à utiliser des chaînes de masses-ressorts pour animer des cheveux individuels, suivis par Plante *et al.* [PCP01]. Les défauts de cette modélisation ont été soulignés au chapitre précédent.

2.3 Système de particules

Les systèmes de particules représentent une généralisation des modèles masses-ressorts. Dans ce modèle, les particules ne sont pas liées de manière permanente à des particules voisines à travers un réseau de connexion, mais peuvent au contraire se déplacer librement et potentiellement interagir avec n'importe quelle autre particule. En général l'ensemble des particules avec lesquelles une particule donnée peut interagir est cependant limité au voisinage spatial de cette particule (ce voisinage évolue au cours du temps). La nature des interactions entre particules peut par exemple suivre un modèle d'attraction-répulsion qui peut dériver *a priori* d'une énergie potentielle quelconque. Ainsi, ce type de modèle non-structuré a pu être utilisé pour diverses applications, telles que la modélisation de matériaux en fusion [TPF89], la simulation de fluides [Ree83, MP89], ou de sable [LHM95], en proposant à chaque fois un modèle d'interaction le plus approprié possible. La validation à l'échelle macroscopique de tels modèles d'interaction reste cependant délicate.

2.4 Modèle SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)

Le modèle *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) a été conçu à l'origine pour simuler des fluides cosmiques en astrophysique [Mon92]. Cette méthode permet de discrétiser un champ continu par un ensemble fini de particules, où chaque particule est considérée comme un point d'échantillonnage d'un petit volume qui l'entoure et qu'elle représente. L'avantage de cette approche est qu'elle permet de passer d'un milieu continu à un système discret composé de particules, dont les équations du mouvement et les interactions mutuelles dérivent de manière cohérente de la physique du milieu continu considéré à l'origine.

La base du modèle SPH repose sur l'approximation d'un champ scalaire continu f en un point $\mathbf{r}$, par une valeur portée par une particule en $\mathbf{r}$ calculée par une moyenne locale des valeurs du champ f dans une petit volume V autour de $\mathbf{r}$. Cette interpolation locale du champ, notée $< f(\mathbf{r}) >$ s'écrit à l'aide d'une convolution de f par un noyau de filtrage :

$$< f(\mathbf{r}) >= \int_V f(\mathbf{r}')\, W_h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \mathrm{d}\mathbf{r}'$$

où W_h est un filtre de lissage, dont l'étendue est contrôlée par le paramètre h, et qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall h \qquad \int_V W_h = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} W_h = \delta,$$

où δ est l'impulsion de Dirac.

Cette expression peut s'écrire comme une intégrale sur la masse $\rho\,\mathrm{d}m$ du volume V (avec ρ la densité massique du milieu), puis être discrétisée. On obtient alors l'expression approchée suivante pour $< f(\mathbf{r}) >$:

$$< f(\mathbf{r}) > \simeq \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W_h(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$

où m_j est la masse de la particule j, et les f_j sont les valeurs estimées du champ f aux points d'échantillonnage $\mathbf{r}_j$ représentés par les positions des particules.

On peut également obtenir une approximation du gradient $\mathbf{grad}\, f$ au point $\mathbf{r}$:

$$< (\mathbf{grad}\, f)(\mathbf{r}) > \simeq \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} (\mathbf{grad}\, W_h)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j).$$

Il est possible alors, *via* une *équation d'état* pour le milieu fluide considéré, de calculer les forces de pression s'exerçant sur chaque particule, et d'en déduire alors un modèle d'interaction entre particules cohérent avec la physique du milieu fluide sous-jacent.

Desbrun [Des97] a utilisé le modèle SPH pour simuler des objets hautement déformables. Ce modèle a également été repris par Hadap *et al.* [HMT01, Had03] pour simuler les interactions entre cheveux, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent.

2.5 Approches nodales

La méthode la plus naturelle pour simuler un objet déformable, très souvent utilisée en informatique graphique, consiste tout d'abord à écrire les équations continues en espace et en temps décrivant le mouvement de l'objet considéré - en s'inspirant des lois de la mécanique des milieux continus - puis à *approcher* ces équations, de manière à obtenir des équations discrètes, en espace et en temps, adaptées à la résolution numérique. Nous ne parlerons ici que de la discrétisation spatiale des équations, la discrétisation en temps étant traitée en Section 3.

Méthode des éléments finis

De nombreuses techniques mathématiques, plus ou moins précises, existent pour discrétiser des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles (EDP). La plus connue est sans conteste la méthode des *éléments finis*, qui est utilisée dans la plupart des simulateurs industriels, et dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'électromagnétisme, la biologie, la physique des fluides, etc. De nombreux ouvrages traitent du sujet dans les détails, mais pour acquérir rapidement une idée claire et précise de la méthode, nous recommandons au lecteur le cours en ligne de Garrigues [Gar01], ou encore la description très synthétique présentée par Nocent dans l'état de l'art de sa thèse [Noc01].

Étant donnée une EDO (ou une EDP), dont l'inconnue est la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, la méthode des éléments finis consiste à trouver une solution approchée $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ du problème sur Ω, construite par morceaux sur des sous-domaines Ω_i de Ω appelés *mailles*. Chaque morceau $\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega_i}$ de la solution approchée est défini par interpolation sur différents points d'échantillonnage de la maille, appelés *nœuds*. Cette recherche de solution approchée discrète correspond en fait à une formulation *faible* (ou variationnelle) du problème initial.

En synthèse d'images, la méthode des éléments finis a été utilisée en faisant souvent un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. D'une part, le maillage choisi correspond la plupart du temps à une triangulation (cas surfacique) ou à une tétraédrisation (cas volumique) de l'objet considéré, les n nœuds de la discrétisation correspondant alors aux sommets des triangles ou des tétraèdres. D'autre part, la fonction d'interpolation est choisie comme étant linéaire. Enfin, plutôt que de considérer la position instantanée de chacun des nœuds i, $1 \leq i \leq n$, on considère généralement leur déplacement relatif $\mathbf{u}_i$ par rapport à une position de référence. Sous ces hypothèses, la discrétisation donne finalement un système matriciel de la forme :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbb{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbb{K}\mathbf{u} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ est le vecteur déplacement (de taille n) du système discret, $\mathbb{M}$ sa matrice d'inertie (liée à la masse du système), $\mathbb{D}$ sa matrice d'amortissement (liée au frottement visqueux du système), et $\mathbb{K}$ sa matrice de raideur (liée à l'élasticité du système).

Le principal problème rencontré avec la méthode des éléments finis est le coût de calcul prohibitif mis en jeu lors de la résolution du système matriciel, qui peut atteindre une grande taille si l'objet considéré a besoin d'être finement discrétisé pour permettre une simulation stable. Pour améliorer

les performances, il est ainsi courant de supposer que la matrice de raideur $\mathbb{K}$ est constante, ce qui implique que l'on se place dans le cas de l'élasticité linéaire, valable uniquement pour des petites déformations (ce qui se traduit ici par une limitation à de petits déplacements $\mathbf{u}_i$). L'une des premières méthodes en informatique graphique basée sur la discrétisation par éléments finis a été proposée par Gourret *et al.* [GMTT89], pour simuler les déformations engendrées par une main serrant une balle déformable. Bien qu'elle ne calcule pas la dynamique des déformations, mais seulement leurs états d'équilibre successifs, et qu'elle se place dans l'hypothèse des petits déplacements, cette méthode s'est avérée très coûteuse, et inexploitable dans le cadre d'une application temps-réel. Beaucoup de méthodes ont alors tenté par la suite de prendre en compte des déformations plus importantes, éventuellement non-linéaires, tout en essayant de rendre la méthode adaptée au temps-réel. Parmi tous ces travaux, citons par exemple l'approche de Debunne *et al.* [DDCB01], basée sur des éléments finis dits *explicites* et couplée à une stratégie multirésolution, qui permet la simulation et la manipulation en temps-réel d'objets déformables.

À notre connaissance, la méthode des éléments finis n'a jamais été utilisée en informatique graphique pour animer des objets filiformes tels que des cheveux.

Méthode des différences finies

La méthode des *différences finies* fournit une autre manière, plus simple, de discrétiser des équations différentielles : comme nous allons le montrer en Section 3.1, le principe consiste à approcher directement les termes dérivés en utilisant le développement de Taylor-Young pour une fonction dérivable, dont on limite le nombre de termes à un certain ordre. Le type d'approximation choisi pour le calcul discret d'une dérivée correspond à un *schéma numérique*. Si les équations considérées contiennent des termes dérivés en espace d'ordre 2 ou plus, il suffit d'appliquer le schéma choisi de manière récursive pour obtenir une approximation discrète de ces termes. Les différents schémas numériques existants sont mentionnés en Section 3 (nous considérons dans cette section des schémas numériques en temps, mais bien évidemment, ils peuvent s'appliquer à n'importe quelle autre dimension).

Le résultat d'une telle discrétisation est, comme dans le cas des éléments finis, la formulation d'un système matriciel, le plus souvent creux, puisque chaque terme dérivé est généralement approché par une expression qui dépend uniquement de la valeur de points voisins sur le maillage spatial considéré. D'où la qualification de *locales* souvent attribuée aux méthodes *nodales* [BW92], par opposition aux méthodes de déformation *globale* évoquées en Section 2.6.

Dans le Chapitre 7, nous utiliserons un schéma par différences finies élaboré, celui de Hou *et al.* [HKS98], en vue de résoudre numériquement les équations de Kirchhoff pour les tiges élastiques inextensibles. Ce schéma est en particulier adapté à la discrétisation précise de termes dérivés dont l'ordre de dérivation est élevé. Malheureusement, cette méthode ne sera pas suffisante pour obtenir un modèle numérique stable, et nous abandonnerons alors ce type de méthode nodale au profit d'une méthode Lagrangienne au nombre de degrés de liberté réduit, dont le principe est présenté dans la section suivante.

2.6 Systèmes déformables réduits

Contrairement aux approches nodales, qui paramétrisent les équations du système par des déplacements liés à des points d'échantillonnage de l'espace, les méthodes de réduction cherchent à trouver des paramètres contrôlant directement les différents types de déformation souhaités. L'un des principaux buts de ces modèles est de gouverner la dynamique du système par un jeu réduit de paramètres (géométriques ou physiques) intuitifs. Ces méthodes, dont la mise en œuvre est parfois complexe, ont cependant le grand avantage de fournir des simulations stables, sans exiger pour autant une discrétisation fine des objets simulés, contrairement aux approches nodales.

Dynamique modale

L'un des premiers modèles à déformations réduites a été présenté par Pentland et Williams [PW89]. S'inspirant de la théorie vibratoire des matériaux, leur méthode propose de linéariser les équations décrivant le mouvement mécanique d'un modèle, après discrétisation par une méthode de type éléments finis, puis de décomposer ces équations sur une base fréquentielle faisant ainsi apparaître les différents modes de vibration de l'objet. En ne gardant que les termes principaux de la décomposition (modes primaires), la méthode filtre alors les mouvements à hautes fréquences - indésirables car sources d'instabilités numériques - et permet alors de simuler le mouvement des objets de manière robuste.

Plus concrètement, la méthode part de l'équation matricielle (2.1) issue de la discrétisation nodale des équations d'origine du problème par la méthode des éléments finis, et fait l'hypothèse que la matrice d'amortissement $\mathbb{D}$ dépend de manière affine des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$, $\mathbb{D} = \alpha\mathbb{M} + \beta\mathbb{K}$ (hypothèse de Rayleigh). En choisissant alors une base propre $\mathbb{P} = \{\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ pour la matrice carrée $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$, qui soit également une base orthogonale pour $\mathbb{M}$ (donnant la relation ${}^{\mathrm{T}}\mathbb{P}\mathbb{M}\mathbb{P} = \mathbb{I}$), on peut montrer alors que dans la base $\mathbb{P}$, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + (\alpha\mathbb{I} + \beta\mathbb{L})\,\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbb{L}\bar{\mathbf{u}} \tag{2.2}$$

où $\mathbb{L}$ est la matrice diagonale contenant les n valeurs propres λ_i, $i \in [1..n]$ de la matrice $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$, associées à la base propre $\mathbb{P}$, et $\bar{\mathbf{u}}$ est l'expression du vecteur déplacement $\mathbf{u}$ dans la base $\mathbb{P}$.

L'équation matricielle (2.2) fournit ainsi n équations linéaires indépendantes, chaque équation correspondant à un mode de vibration dont la fréquence est proportionnelle à λ_i. En supposant que les lignes de la base propre $\mathbb{P}$ et de la matrice des valeurs propres $\mathbb{L}$ sont ordonnées selon les valeurs propres croissantes, le nombre n de modes superposés est choisi de manière à obtenir un compromis entre la diversité des déformations simulées et le coût de calcul. Grâce à la forme diagonalisée de son équation matricielle (2.2) - rendant la résolution numérique efficace - et grâce à la possibilité de réduire la taille du système en supprimant des modes de déformation, la dynamique modale est rapidement apparue comme une méthode de prédilection pour le temps-réel, à l'opposé des éléments finis. Il est cependant difficile, avec une telle méthode, de contrôler exactement l'impact lié à l'ajout ou au retrait d'un mode vibratoire sur le comportement du système, et sur sa stabilité numérique [BW92].

Ce type d'approche, basé sur la décomposition linéaire du mouvement d'un objet en modes vibratoires de déformation, a été repris par la suite dans le cadre d'applications interactives simulant le mouvement d'arbres sous le vent [Sta97], ou encore les déformations de la chair de personnages [JP02].

Le principal défaut de cette méthode est son incapacité à prendre correctement en compte les déformations importantes des objets, du fait de la nature linéaire des équations considérées. Très récemment, plusieurs travaux ont proposé d'introduire des termes non-linéaires de déformation, tout en maintenant de bonnes performances de calcul. Choi et Ko [CK05b] réduisent les artefacts liés à la linéarisation des équations en intégrant dans la résolution de l'équation (2.2) les petites rotations subies à chaque pas de temps par les nœuds du maillage. La superposition des modes vibratoires demeure cependant linéaire, conduisant à un découplage des modes de déformation. Pour intégrer de manière plus rigoureuse les termes non-linéaires de déformation, Barbic et James [BJ05] étendent la méthode de dynamique modale linéaire à une méthode plus générale prenant en compte les termes quadratiques du tenseur de Green-Lagrange, grâce au choix d'une base de coordonnées réduites $\mathbb{P}'$ rassemblant les vecteurs de $\mathbb{P}$ (généralisés à une déformation de repos quelconque $\mathbf{u}^0$) et leurs vecteurs dérivés, appelés *dérivées modales*.

Modèle Lagrangien à nombre fini de degrés de liberté

Le grand avantage de la mécanique de Lagrange est de proposer comme paramétrisation d'un système l'ensembre de ses degrés de liberté mécaniques. Ces paramètres indépendants, qui caractérisent de manière univoque la mécanique du système, sont appelés *coordonnées généralisées* du système. A partir de cette paramétrisation, la mécanique de Lagrange fournit alors directement les équations du mouvement du système, fondées sur le principe général de l'action minimale (principe de Maupertuis). Nous invitons le lecteur à se référer à l'Annexe C pour une présentation synthétique du formalisme de Lagrange. L'Annexe C traite également l'exemple concret de la mise en équation d'un système continu (corde vibrante), d'une part dans le cadre de la mécanique de Newton, d'autre part dans le cadre de la mécanique de Lagrange.

Étant donné un système continu (ayant un nombre infini de degrés de liberté), paramétré par exemple par la fonction continue $\theta(s)$, $s \in [0, L]$ (comme dans l'Annexe C), la mécanique de Lagrange fournit directement les équations du mouvement de ce système :

$$\forall s \in [0, L] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(s)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta(s)}$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ est le *Lagrangien* du système, qui s'évalue comme la différence entre l'énergie cinétique $\mathcal{T}$ et l'énergie potentielle $\mathcal{U}$ du système.

Ces équations sont continues, et bien évidemment identiques à celles que fournirait la mécanique de Newton. Cependant, il existe, grâce au formalisme de Lagrange, un moyen simple et très élégant pour discrétiser le système mécanique auquel on s'intéresse. Cette méthode consiste à :

- tout d'abord, restreindre le nombre de degrés de liberté considérés à un nombre fini n de coordonnées indépendantes pour le système. Par exemple, on peut simplifier le cas de la corde vibrante à une corde dont l'angle $\theta(s)$ est constant par morceaux le long de la tige. Cela mène à un nouveau système mécanique, *discret* cette fois-ci, prenant la forme d'une ligne brisée, et paramétré par les n angles $(\theta_i)_{i \in [1..n]}$ (la corde devient alors une chaîne articulée) ;
- ensuite, proposer la formulation d'une énergie potentielle $\mathcal{U}_d$ et d'une énergie cinétique $\mathcal{T}_d$ "raisonnables" pour le nouveau système discret. Le Lagrangien du nouveau système s'écrit alors $\mathcal{L}_d = \mathcal{T}_d - \mathcal{U}_d$;
- enfin, écrire les équations de Lagrange, qui dans le cas discret prennent la forme :

$$\forall i \in [1..n] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \theta_i}.$$

Cette approche est entièrement illustrée à la fin de l'Annexe C, toujours sur l'exemple de la corde vibrante (les n coordonnées indépendantes choisies ne sont pas les angles θ_i, mais les déflexions y_i). Ce sera exactement ce type d'approche qui servira, dans le cadre de la collaboration avec Basile Audoly et L'Oréal sur la modélisation réaliste de cheveux, à construire un système mécanique discret à partir du modèle continu de tige de Kirchhoff, en choisissant cette fois-ci comme paramètres indépendants pour la tige ses *courbures* κ_1, κ_2 et *torsion* τ, supposées constantes par morceaux (voir Chapitres 5, 6, et 7).

Comparativement aux approches de dynamique modale, la mécanique de Lagrange offre un meilleur contrôle et une meilleure estimation de l'approximation faite sur le modèle par rapport à la réalité ou par rapport au modèle continu d'origine. Le fait de changer le nombre de degrés de liberté du modèle n'a aucun impact sur la stabilité de la méthode (l'énergie mécanique du système se conserve toujours, quelle que soit la valeur de n), tandis que le fait de supprimer ou d'ajouter des termes dans la décomposition fréquentielle des équations peut perturber la stabilité du système.

En revanche, cette méthode peut parfois conduire à la formation d'un système matriciel dense (dans le cas où les paramètres choisis ont un impact direct sur tous les autres paramètres de l'objet),

comme nous le verrons au Chapitre 7. La résolution de ce système s'avère alors beaucoup plus coûteuse que pour un système de taille similaire obtenu par certaines méthodes nodales (système creux), et par la méthode modale (système diagonal). Cet inconvénient est néanmoins nuancé par le fait qu'il est possible, dans la méthode de Lagrange, d'obtenir une paramétrisation très riche pour le système, et conduisant à un système de taille réduite, grâce au choix judicieux d'un nombre limité de degrés de liberté. Cela n'est évidemment pas possible avec une méthode de type éléments finis qui requiert généralement un nombre très important de points de discrétisation, d'une part pour assurer la précision des résultats, d'autre part pour garantir la stabilité numérique.

Dynamique globale

Le formalisme Lagrangien a été relativement peu exploité pour l'animation d'objets en graphique, sans doute à cause de sa complexité de mise en œuvre. Witkin et Welch l'ont utilisé d'une manière un peu particulière, dans le but d'appliquer des déformations *globales* à des corps déformables [WW90]. Dans leur approche, ils choisissent les coordonnées généralisées du système comme les coefficients d'une matrice $\mathbb{R}$ de transformation caractérisant la déformation linéaire $\mathbf{X}(t) = \mathbb{R}(t)\,\mathbf{g}(\mathbf{X^0})$ d'un vecteur de positions $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_i, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ du système, par rapport à la position au repos $\mathbf{X^0} = \{\mathbf{x}_1^0, \cdots \mathbf{x}_i^0, \cdots, \mathbf{x}_n^0\}$ du système. La fonction $\mathbf{g}$ est choisie comme une fonction polynomiale (indépendante de $\mathbb{R}$ et de t), autorisant ainsi des déformations non-linéaires du système par rapport à sa position au repos $\mathbf{X^0}$. En pratique, Witkin *et al.* n'ont traité que le cas des déformations purement linéaires (*i.e.*, en choisissant $\mathbf{g}$ linéaire, de manière à simplifier les calculs). Ce travail a été repris ensuite par Baraff et Witkin qui l'ont étendu à la prise en compte des déformations polynomiales d'ordre 2 [BW92]. Ce modèle a l'avantage de gérer les déformations du système de manière globale, à travers la matrice $\mathbb{R}$. Tout comme les modèles de dynamique modale, il permet ainsi d'éviter les phénomènes oscillatoires qui apparaissent dans les modèles à interactions locales - tels que les approches nodales - et qui peuvent constituer une source importante d'instabilités numériques du système. Toutefois, cette suppression des hautes fréquences de système se fait ici de manière plus contrôlée, car quel que soit le type de déformations choisi, la méthode garantit toujours que les équations résultantes satisfont le principe physique d'action minimale. L'inconvénient principal de ce genre d'approche semble plutôt être la difficulté à traiter des déformations plus complexes que quadratiques.

D'autres travaux plus récents ont porté sur la conception d'un modèle Lagrangien de spline dynamique pour l'animation de fils [Nou99, Noc01, Len04]. Ces approches seront analysées au Chapitre 5.

2.7 Récapitulation

Modèle	Niveau de discrétisation	Structuré	local
Masses-ressorts	amont	oui	oui
Particules	amont	non	oui
SPH	aval	non	oui
Différences finies	aval	oui	oui
Eléménts finis	aval	oui	oui
Dynamique modale	aval	oui	non
Modèle Lagrangien	amont	oui	non
Dynamique globale	amont	oui	non

TAB. 2.1: *Classification des modèles existants pour l'animation de corps déformables.*

3 Résolution numérique (en temps)

Pour un système 3D modélisé de manière continue ou discrète, les équations du mouvement font apparaître des dérivées temporelles du second ordre, dues à la présence de termes d'accélération (voir Annexe C). Pour les modèles continus, nous avons vu en Section 2.5 que des termes dérivés en espace, à n'importe quel ordre, pouvaient également apparaître. Nous nous limiterons dans cette section à la dépendance en la variable temporelle t. En introduisant une variable supplémentaire homogène à une vitesse, on peut en général se ramener à un système faisant intervenir des équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g}(t,\mathbf{f}). \tag{2.3}$$

La résolution analytique de ce type d'équation par intégration formelle étant en général impossible, le seul recours est la résolution *numérique*, qui fait alors appel à l'utilisation d'un *schéma numérique* encore appelé *schéma d'intégration*. Le but d'un tel schéma est de *discrétiser* les équations différentielles en jeu, de manière à obtenir des équations qui ne dépendent plus de la variable continue t, mais d'une nouvelle variable T prenant des valeurs discrètes. La clef de cette discrétisation réside dans l'*approximation* des opérateurs de dérivation, par la méthode des différences finies. Les équations discrètes obtenues sont alors résolues grâce à un processus itératif au cours duquel la variable T est incrémentée d'une valeur ε, supposée petite par rapport à un temps caractéristique de l'animation, et appelée *pas de temps* de la simulation.

Pour plus de détails sur les méthodes d'intégration numérique, le lecteur pourra se référer à des ouvrages classiques d'analyse numérique tels que [AP88,Lam91], ou encore à l'état de l'art très complet sur le sujet dans la thèse de Nocent [Noc01], qui propose une analyse approfondie des différents schémas numériques existants.

3.1 Schéma numérique : définition

Un schéma numérique consiste à approcher l'opérateur différentiel $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$ par une expression qui dépend d'un certain nombre d'évaluations discrètes de $\mathbf{f}$. L'espace d'évaluation discret d'évaluation de $\mathbf{f}$, noté ici comme l'ensemble des points $\{t-p\varepsilon, t-(p-1)\varepsilon, \cdots, t, t+\varepsilon, \cdots, t+q\varepsilon,\ p,q \in \mathbb{N}\}$ est appelé *maillage* de la discrétisation, et le nombre de points constituant le maillage (ici, $p+q+1$) est appelé *nombre de pas* de la discrétisation.

3.2 Précision

Dans la méthode des différences finies, la discrétisation des termes dérivés se base sur la formule de décomposition classique de Taylor-Young, qui fournit une expression polynomiale approchée d'ordre n quelconque pour toute fonction $\mathbf{f}$ qui est n-fois dérivable sur un intervalle contenant le segment $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$:

$$\mathbf{f}(t+\varepsilon) = \mathbf{f}(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^i}{i!}\frac{\mathrm{d}^i\mathbf{f}}{\mathrm{d}t^i}(t) + R^n(t,\varepsilon) \qquad \text{avec } \lim_{\varepsilon\to 0} R^n(t,\varepsilon) = 0\ .$$

$R^n(t,\varepsilon)$ est appelé *reste* du développement de $\mathbf{f}$ à l'ordre n. En choisissant $n=1$ et en tronquant le reste dans le développement de Taylor-Young, on obtient alors une approximation de $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$ en t au *premier ordre* :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathbf{f}(t+\varepsilon)-\mathbf{f}(t)}{\varepsilon}\ .$$

L'erreur de cette approximation est en $O(\varepsilon)$. Une meilleure approximation de $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$ peut s'obtenir en gardant dans le développement de Taylor-Young le terme dérivé d'ordre deux :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathbf{f}(t+\varepsilon) - \mathbf{f}(t-\varepsilon)}{2\varepsilon} .$$

Cette approximation est du *second ordre*, car l'erreur est en $O(\varepsilon^2)$. De manière générale, la *précision* d'un schéma numérique sera d'autant meilleure que son *ordre*, *i.e.* le nombre de termes gardés dans la décomposition de Taylor-Young, sera important.

3.3 Stabilité

Si la solution d'une équation différentielle est peu perturbée par un léger changement des conditions initiales, alors on dira que le problème est *stable* ou bien *posé*. La méthode d'intégration choisie pour résoudre un tel système n'a alors pas besoin d'être particulièrement stable. En revanche, les problèmes dits *raides* sont caractérisés pas le fait qu'ils imposent, lors d'une intégration numérique, l'utilisation d'un pas de temps beaucoup plus petit que celui qui est requis pour satisfaire la précision désirée [AP88, Lam91] ; si ce n'est pas le cas, il y a fort risque de *divergence* de la méthode (*i.e.* un éloignement très important de la solution approchée par rapport à la solution théorique). Ces problèmes requièrent l'utilisation de schémas numériques *stables*.

On note désormais $\{T-p, T-(p-1), \cdots, T-1, T, T+1, \cdots, T+(q-1), T+q\}$ les temps discrets correspondant aux pas du maillage. On aura ainsi la correspondance $\mathbf{f}^T = \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{f}^{T+1} = \mathbf{f}(t+\varepsilon)$, et ainsi de suite. De manière générale, un schéma d'intégration numérique pour une équation différentielle ordinaire du premier ordre, donnée par l'équation générale (2.3), permet de se ramener à une équation discrète de la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(S_i\mathbf{f}^{T+1} + S_t[0]\mathbf{f}^T + \cdots + S_t[S_n-1]\mathbf{x}^{T-(S_n-1)}\right) = S_j\mathbf{g}(\mathbf{f}^{T+1}) + S_s[0]\mathbf{g}(\mathbf{f}^T) + \cdots + S_s[S_m-1]\mathbf{g}(\mathbf{f}^{T-(S_m-1)}) \quad (2.4)$$

où S_i, S_j sont des scalaires, et S_t (resp. S_s) est un tableau de scalaires de taille S_n (resp. S_m).

On cherche ici à évaluer $\mathbf{f}^{T+1}$, au pas de temps suivant $T+1$, en supposant connues toutes les quantités aux pas de temps courant et précédents. Dans l'équation discrète (2.4), le membre de gauche donne une approximation de la dérivée $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de l'évaluation de $\mathbf{f}$ aux pas de temps courant et précédents $T-(S_n-1), \cdots, T-1, T$, ainsi qu'au pas de temps suivant $T+1$.

On distingue alors à ce niveau deux types de schémas différents, selon la présence ou non de chacun de ces deux types de termes :

- Les schémas *explicites* : ce sont les schémas qui évaluent le terme dérivé en fonction des pas de temps connus (courant et précédents) seulement ; autrement dit, ici, les schémas pour lesquels $S_i = 0$.
- Les schémas *implicites*, qui évaluent l'opérateur différentiel en fonction, notamment, du pas de temps inconnu $T+1$ (et éventuellement aussi des pas de temps courant et précédents) ; ce sont donc les schémas pour lesquels $S_i \neq 0$.

Les schémas implicites sont beaucoup plus stables que les schémas explicites, mais aussi plus coûteux car ils requièrent la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps.

4 Gestion des contraintes

En général, on souhaite que l'objet déformable simulé puisse interagir avec l'environnement extérieur. Pour cela, il faut donc être capable de traiter les contacts et collisions susceptibles de se

produire entre l'objet considéré et d'autres objets de la scène. Dans le cas des cheveux, la résolution des contacts est un problème majeur, autant du point de vue de la détection que du traitement, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. En effet, il existe un nombre simultané de contacts entre les cheveux extrêmement important, sans oublier que les cheveux restent également en contact quasi-permanent avec le corps du personnage au cours de l'animation.

4.1 Détection de collisions

Deux corps sont détectés en collision à un instant t lorsqu'à cet instant, leur intersection géométrique est non vide. La détection de collision constitue généralement l'étape la plus difficile et la plus coûteuse lors du traitement des collisions entre objets, car elle doit chercher parmi tous les objets constituant la scène ceux qui sont susceptibles de s'intersecter à chaque instant. Pour juger de la qualité d'un algorithme de détection de collision, on peut se baser sur les deux critères suivants : 1) la propriété *conservative* de la méthode, qui signifie qu'à chaque instant, *toutes* les collisions sont effectivement détectées [Red02], et 2) l'*efficacité* de la méthode.

Détection discrète et détection continue

La manière la plus simple d'aborder le problème de la détection de collisions consiste à échantillonner les trajectoires des différents objets de la scène selon un pas de temps discret, et à examiner, à chaque pas de temps, si une collision s'est produite ou non. L'inconvénient principal de cette *détection discrète* est qu'elle ne garantit pas la propriété de conservation : en effet, avec cette méthode, deux objets fins se déplaçant rapidement peuvent se traverser entre deux pas de temps, sans que l'algorithme ne puisse le détecter.

Pour manquer le moins possible de collisions, d'autres méthodes, basées non plus sur le calcul d'intersections entre objets à certains pas de temps, mais sur le calcul d'intersections entre *trajectoires* des objets, sont apparues. Ces approches de *détection continue* permettent en général de repérer l'ensemble des collisions survenues entre deux pas de temps, et de calculer précisément les instants où se sont produites les collisions. Elles sont cependant plus lourdes à mettre en œuvre que les méthodes de détection discrète.

Accélération de la détection

Afin d'être capable de simuler, en des temps de calcul raisonnables, un grand nombre d'objets en interaction les uns avec les autres, de nombreuses techniques permettant d'accélérer la détection de collision ont été développées en informatique graphique. On peut grossièrement distinguer deux types d'approches : 1) les méthodes Eulériennes, qui se basent sur un partitionnement de l'espace dans lequel se situent les objets (grille de l'espace par exemple) et permettent ainsi de suivre le mouvement des objets à travers des points fixes de l'espace ; 2) les méthodes Lagrangiennes, qui au contraire travaillent dans l'espace de l'objet mobile, et proposent par exemple une approximation du volume de l'objet à travers une hiérarchie de boîtes englobantes, ce qui permet de faciliter le test de collision entre plusieurs objets.

4.2 Réponse à la collision

Une fois la collision détectée entre deux objets, il s'agit d'empêcher cette collision ou de corriger les effets d'une interpénétration éventuelle.

Les méthodes de *pénalité* constituent le moyen le plus simple pour résoudre le problème : des forces élastiques, proportionnelles à l'interpénétration entre les deux objets en collision, sont appliquées sur les objets de manière à les séparer. Le problème est qu'il est impossible de connaître à l'avance la raideur du ressort à appliquer pour replacer les objets en position de contact sans interpénétration. Une valeur choisie arbitrairement risque de ne pas satisfaire la contrainte de non-pénétration des objets, ou encore d'introduire des instabilités dans l'animation des objets, pour certains types de mouvements.

Les méthodes *analytiques* ont pour but de calculer de manière exacte les contacts se produisant entre objets. Ces méthodes sont cependant assez difficiles à mettre en œuvre dans le cas d'objets déformables, dont la géométrie n'est pas triviale. De plus, lorsqu'il peut y avoir plusieurs points de contact, il faut être capable de répartir la réponse à l'ensemble de ces points.

Dans le même ordre d'idée, la méthode des *multiplicateurs de Lagrange* permet de calculer très précisément les forces à appliquer aux objets pour satisfaire les contraintes de non-interpénétration, en ajoutant au problème initial d'optimisation une variable λ que l'on va pouvoir éliminer dans la résolution de manière à satisfaire la contrainte.

Cependant, dans le cas où le système considéré (tel qu'une chevelure) subit à chaque pas de temps un grand nombre de collisions *transitoires*, les méthodes d'optimisation sous contraintes semblent assez peu appropriées, et en tous les cas très lourdes à mettre en œuvre.

5 Bilan

Nous avons vu que les principaux enjeux liés à l'animation de corps déformables concernent la discrétisation à la fois précise et efficace des problèmes, en temps et en espace. Dans la suite, nous utiliserons deux types de discrétisation spatiale bien distincts pour modéliser des cheveux. Dans la partie II de ce mémoire, dont l'objectif est l'animation de cheveux en temps interactif, nous modéliserons la dynamique d'une mèche de cheveu à l'aide d'un système masses-contraintes - s'apparentant à la famille des masses-ressorts - combiné à un schéma d'intégration en temps de type Euler explicite (voir Chapitre 3). Nous verrons que ce modèle, bien que peu précis, a l'avantage de combiner à la fois efficacité et stabilité. Le modèle de cheveu que nous utiliserons en partie III de ce mémoire pour une simulation physiquement réaliste de cheveux sera quant-à-lui dérivé du modèle mécanique de tige de Kirchhoff, à partir d'une formulation Lagrangienne à nombre de degrés de liberté fini. Les collisions seront gérées, dans la partie II, par une méthode de correction sur les positions, et dans la partie III, par des méthodes à pénalité. Diverses accélérations pour la détection des collisions entre cheveux seront proposées dans ces deux parties : dans la partie II, nous utiliserons une grille de l'espace (méthode Eulérienne), tandis que dans la partie III (Chapitre 7), la détection des collisions entre mèches sera effectuée de manière efficace grâce à un suivi de paires de points les plus proches (méthode Lagrangienne).

Deuxième partie

Simulation interactive de chevelures

Introduction

Nous avons vu au Chapitre 1 que la simulation dynamique de chevelures demeure l'une des tâches les plus difficiles à accomplir lorsque l'on souhaite animer des personnages virtuels, tant sur le plan du réalisme que de l'efficacité des calculs mis en œuvre pour la simulation. Si au début de ma thèse, les cheveux courts et la fourrure avaient déjà pu être représentés et animés avec succès dans plusieurs films d'animation, tels que Stuart Little [BR00] ou Monstres et Cie [Fon01], l'animation de longues chevelures libres continuait en revanche à poser d'importants problèmes essentiellement liés aux interactions complexes se produisant entre la chevelure et le corps du personnage, et au sein-même de la chevelure.

Au début de cette thèse, quelques travaux, académiques [HMT01, PCP01] ou industriels [Ken01, FS01], s'étaient déjà attaqués à la simulation dynamique et au rendu de longs cheveux, et de bons résultats visuels avaient été obtenus. Cependant, les coûts prohibitifs mis en jeu (plusieurs heures de calculs pour quelques secondes d'animation) semblaient interdire l'usage de tels modèles pour des applications interactives, telles que le jeu vidéo, ou, plus généralement, les environnements virtuels interactifs peuplés de personnages de synthèse. De plus, dans certaines autres applications *a priori* non contraintes en temps de calcul (cinéma d'animation par exemple), le fait de disposer de modèles dégradés (*i.e.* des modèles dont la qualité de représentation est ajustable en fonction de la puissance de calcul disponible) peut s'avérer très utile lors des phases de prototypage, ou encore pour des pré-calculs rapides de scènes complexes.

Nous avons ainsi choisi de nous orienter, au début de cette thèse, vers la simulation efficace et visuellement plausible de chevelures. Cette partie présente de nouveaux algorithmes permettant de réduire les coûts nécessaires à la simulation de longues chevelures en mouvement, tout en maintenant un bon réalisme visuel. Dans un premier temps, nous proposons d'exploiter la multirésolution pour animer la chevelure à différents niveaux de détail, et réduire ainsi le coût global de l'animation sans trop perdre de détails visuels. Dans un second temps, nous considérons la chevelure comme un milieu volumique, défini par sa densité en chaque point de l'espace, ce qui nous permet de traiter les interactions lumineuses et mécaniques entre cheveux de manière simple et efficace.

CHAPITRE 3

Modèle adaptatif de chevelure pour l'animation

N'oubliez pas que la terre se réjouit de sentir vos pieds nus et que les vents joueraient volontiers avec vos cheveux.

KHALIL GIBRAN

L'ANIMATION visuellement réaliste de longs cheveux pose d'importants problèmes en terme de temps de calcul, essentiellement à cause du nombre très important de cheveux composant une chevelure, et des effets collectifs complexes auxquels ils sont soumis. Au début de ma thèse, les approches existantes se limitaient pour la plupart à l'animation de chevelures lisses et uniformes, sans nécessairement prendre en compte les interactions se produisant entre cheveux. De plus, les mouvements simulés étaient en général très simples (rotation lente de la tête, ou cheveux soumis à un faible vent). Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, Hadap *et al.* ont proposé une manière élégante pour modéliser les effets collectifs des cheveux, en représentant la chevelure comme un milieu fluide [HMT01] ; cette méthode, relativement coûteuse, se limite cependant à la simulation de chevelures lisses et continues. Parallèlement, Plante *et al.* ont montré que la simulation de la chevelure comme un ensemble de mèches volumiques déformables, en interaction les unes avec les autres, pouvait produire de très bons résultats visuels sur des mouvements complexes, mais au prix de plusieurs heures de calcul pour quelques secondes d'animation [PCP01].

Nous présentons dans ce chapitre une approche *adaptative* capable de modéliser les effets de groupement dynamique des cheveux en mèches, caractéristiques du mouvement de longs cheveux. Pour ce faire, nous introduisons la notion d'*arbre adaptatif de mèches (AAM)*. Cette nouvelle structure de contrôle permet de simuler à la fois le mouvement global de la chevelure, et les variations à petites échelles des mèches individuelles. L'avantage de l'AAM par rapport aux méthodes précédentes est

la réduction notoire du coût de simulation et de traitement des interactions, grâce à l'identification automatique des zones de la chevelure où les mouvements visibles de cheveux sont susceptibles de se produire. L'AAM est couplé à une géométrie multirésolution de la chevelure, initialement employée pour définir le modèle de coiffure que l'on souhaite animer. Ce système couplé produit des animations stables, mettant en évidence les effets naturels de regroupements ou de séparations en mèches de la chevelure au cours du mouvement. Nos résultats montrent en outre que la méthode peut s'appliquer à différents types de cheveux, aussi bien lisses que bouclés.

Le travail que nous décrivons ici a été mené en collaboration avec Tae-Yong Kim et Ulrich Neumann de l'University of Southern California, qui nous ont fourni des modèles de coiffures multirésolution et qui ont pris en charge le rendu final de nos animations. Cette collaboration a conduit à une publication à l'*ACM-EG Symposium on Computer Animation (SCA)* en 2003 [BKCN03]. Notre méthode d'animation adaptative a également fait l'objet d'un transfert industriel vers la filiale *Virtual actors* créée conjointement par le Laboratoire GRAVIR-IMAG et la société de jeux vidéos *Galiléa*[1].

1 Simulation adaptative

L'utilisation de niveaux de détail adaptatifs est un moyen bien connu en informatique graphique pour améliorer les performances d'une simulation. Comme mentionné par Debunne [Deb00] dans sa thèse, un modèle adaptatif (spatial) d'un objet dynamique consiste à simuler et à faire cohabiter différents niveaux de résolution pour différentes zones spatiales de l'objet, en fonction de certains critères choisis au départ, et qui fixent automatiquement le changement de niveau de détail des différentes zones de l'objet au cours de l'animation. Debunne établit la distinction suivante entre simulation *adaptative* et simulation *hiérarchique* : dans un modèle adaptatif, une seule résolution est active (et donc calculée) à chaque instant par zone de l'objet, et doit cohabiter avec les résolutions courantes des zones voisines, tandis que dans un modèle hiérarchique, plusieurs niveaux de détail pourront être actifs simultanément sur une même zone de l'objet, et échanger des informations pour accélérer les calculs. Selon cette définition, notre modèle s'apparente à la famille des approches adaptatives.

Les modèles déformables adaptatifs proposés précédemment, tel que [GKS02], sont essentiellement destinés à la simulation de milieux volumiques continus. Dans le cas précis de la simulation de cheveux, plusieurs approches adaptatives ont été mises en place, comme nous l'avons vu au Chapitre 1, à partir de la modélisation de la chevelure comme un milieu continu [CJY02, BCN03]. Nous affirmons cependant que la chevelure *n'est pas un milieu continu*, car l'on peut y observer de fortes discontinuités géométriques au cours du mouvement, en particulier vers les extrémités libres de la chevelures. En 2002, Kim et Neumann [KN02] ont montré que l'utilisation d'une représentation géométrique multirésolution de la chevelure pouvait servir à la modélisation interactive de coiffures complexes. Ce travail ne s'appliquait cependant pas à des chevelures en mouvement. À la même période que nos propres travaux, Ward *et al.* [WLL$^+$03] ont alors proposé un nouveau type de représentation de la chevelure alliant trois niveaux de détail géométrique différents : des surfaces de cheveux (résolution grossière), des bandes de cheveux (échelle intermédiaire) et des cheveux individuels (résolution fine). Les transitions entre ces différents niveaux de détail sont gérées automatiquement au cours du mouvement de la chevelure, selon des critères de visualisation tels que la distance à la caméra. Cette méthode permet alors d'accroître les performances de simulation, principalement à l'étape de rendu. Bien que prometteurs, les résultats sont montrés uniquement dans le cas de mouvements lents tels que des cheveux flottant dans le vent.

[1] La société *Galiléa* et sa filiale *Virtual Actors*, soumises à la rude concurrence du milieu du jeu vidéo, ont malheureusement dû déposer leur bilan respectivement en 2005 et en 2004.

À la différence de l'approche de Ward *et al.*, nous cherchons ici à déterminer des niveaux de détail liés à l'*animation* de la chevelure, et non pas à sa visualisation. Notre méthode se base ainsi sur une nouvelle structure de contrôle du mouvement de la chevelure, l'*arbre adaptatif de mèches* (AAM), capable d'adapter à chaque pas de temps sa résolution locale en fonction de la complexité du mouvement en chaque point de la chevelure. Nous pourrions par ailleurs tout-à-fait imaginer de coupler notre méthode avec l'algorithme de Ward *et al.*, en prenant en considération la taille occupée par la chevelure sur l'écran comme un critère de changement de sa résolution pour l'affichage ; cela nous permettrait ainsi d'accroître l'efficacité de la simulation, à la fois au niveau de l'animation et au niveau de l'affichage de la chevelure.

2 Vue d'ensemble de la méthode

Notre objectif est de simuler le regroupement dynamique en mèches de la chevelure au cours du mouvement, afin de parvenir à des animations à la fois efficaces et stables. L'idée clef consiste à adapter localement la résolution locale de la structure de contrôle durant l'animation, et donc à concentrer les calculs uniquement là où c'est nécessaire, tout en réduisant le nombre d'éléments en interaction afin de maintenir une bonne stabilité pour la simulation.

Nous utilisons une représentation multi-échelle pour la mèche de cheveu, similaire à celle utilisée pour la modélisation de coiffure par Kim et Neumann [KN02]. À chaque pas de temps, on détecte et on traite les interactions entre les mèches actives, de manière semblable à la méthode anisotrope de Plante *et al.* [PCP02]. L'intérêt d'utiliser une structure multirésolution pour la chevelure est de pouvoir modéliser chaque section de mèche par un cylindre indéformable (la déformation des mèches est prise en compte dans le changement de niveau de détail), ce qui simplifie évidemment beaucoup la gestion des collisions.

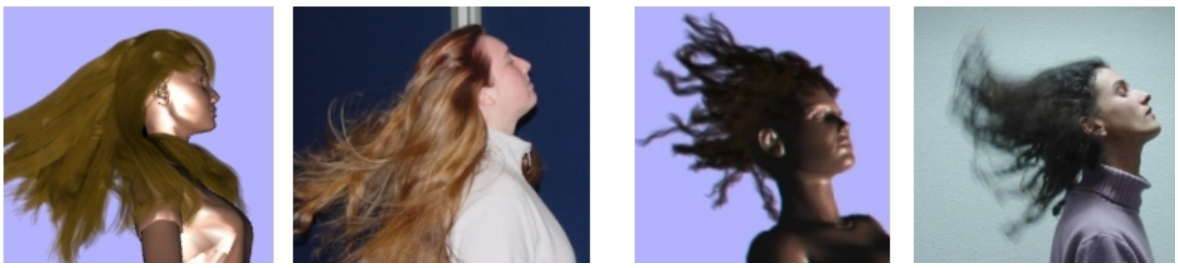


FIG. 3.1: *Comparaisons entre des animations réelles et des résultats de simulation.*

Les principales contributions de notre méthode sont :

- L'introduction d'une nouvelle structure de contrôle pour l'animation de cheveux, appelée *arbre adaptatif de mèches* et noté AAM, qui simule la subdivision et la fusion adaptatives de mèches.
- La spécification de critères pour détecter les endroits de la chevelure où l'on souhaite du raffinement, ou au contraire de la fusion.
- L'amélioration de l'efficacité et de la stabilité dans le traitement des interactions pour les approches à base de mèches.

Les Sections 3, 4 et 5 décrivent respectivement ces trois contributions. Nous présentons l'implémentation de la méthode et les résultats finaux en Section 6, avant de dresser un bilan de la méthode.

3 Arbre adaptatif de mèches (AAM)

Lorsque l'on observe une chevelure réelle en mouvement, on peut remarquer que des mèches se forment et se séparent en fonction du frottement subi, des charges électrostatiques, ou bien de la coiffure initiale. Le nombre, l'endroit et la taille des mèches ainsi observées varient au cours du temps. L'idée d'un arbre adaptatif de mèches (AAM) provient du fait que sur une chevelure réelle, les mèches semblent se former d'abord au niveau des pointes, puis progressivement jusqu'aux racines (comme des fermetures éclair qui pourraient coulisser du bas de la chevelure vers le haut). En effet, les phénomènes d'interactions lient beaucoup plus les cheveux au niveau des racines qu'au niveau des pointes où les cheveux sont *a priori* plus libres de se séparer les uns des autres.

Le traitement mécanique pointu de ces phénomènes complexes d'interaction, effectué à l'échelle du cheveu, exigerait une puissance de calcul considérable, et poserait vraisemblablement des problèmes de stabilité dans l'intégration numérique. Notre approche propose plutôt de modéliser ces phénomènes à l'aide d'une structure de données plus globale, capable d'adapter automatiquement le nombre et l'emplacement des degrés de liberté de la chevelure à chaque instant, en fonction de la complexité de son mouvement. Cette structure de contrôle se présente sous une forme arborescente, qui se ramifie de plus en plus vers les pointes de la chevelure (voir Figure 3.2).

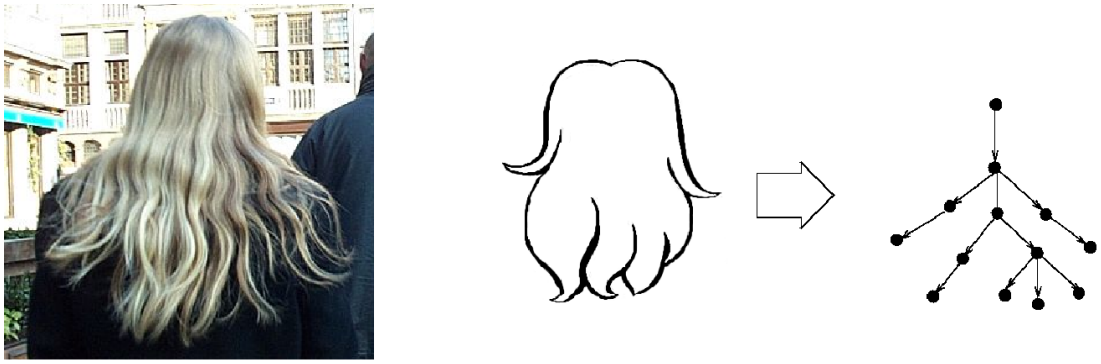


FIG. 3.2: *À gauche, une chevelure réelle divisée en mèches. À droite, la modélisation d'une chevelure par un arbre adaptatif de mèches (AAM). L'AAM est un graphe orienté acyclique dont les nœuds représentent les masses des cheveux adjacents, et les arêtes les liens de contrôle entre les nœuds.*

Notons que la complexité géométrique de la chevelure n'est pas forcément liée à la complexité de son mouvement. Par exemple, des cheveux bouclés, représentés par un grand nombre de petites mèches hélicoïdales à l'étape du rendu, peuvent très bien, lors de légers mouvements de la tête, se comporter globalement comme s'il s'agissait d'une seule grosse mèche. Inversement, une chevelure d'apparence lisse et uniforme pourra se subdiviser soudainement en un ensemble de petites mèches et verra ainsi son nombre de degrés de liberté accru si elle est soumise à un mouvement violent. Pour modéliser ce comportement, nous utilisons un modèle multirésolution de chevelure (qui indique les différents niveaux de détail disponibles au cours de l'animation), couplé à la structure d'AAM qui contrôle l'évolution du mouvement des cheveux. La structure multirésolution de la coiffure que l'on souhaite simuler sert essentiellement à guider le processus de subdivision des mèches en sous-mèches au cours du mouvement.

3.1 Géométrie multirésolution de la chevelure

Le modèle géométrique de chevelure que l'on prend en entrée est créé grâce à une hiérarchie de cylindres généralisés (GCs), en adaptant l'approche de Kim et Neumann [KN02] consistant à modéliser des mèches grossières par des GCs que l'on peut ensuite raffiner localement en sous-mèches, et

ainsi de suite. Dans ce qui suit, nous utiliserons les termes *sur-GC* et *sous-GC* (et également *sur-nœud* et *sous-nœud*, voir dans la suite) pour évoquer la hiérarchie de ce modèle géométrique, tandis que les termes *parent* et *enfant* serviront à désigner les relations entre les nœuds de l'AAM (voir Figure 3.3).

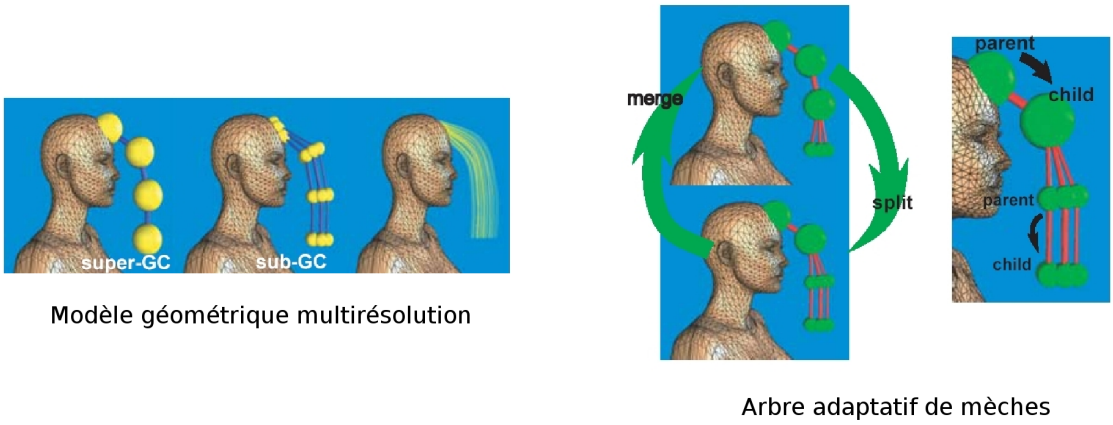


FIG. 3.3: *Relations entre le modèle géométrique multirésolution et l'AAM.*

Le modèle géométrique multirésolution de la coiffure est créé grâce à la méthode de Kim et Neumann [KN02], qui a été légèrement modifiée de la manière suivante :

- Le nombre de segments dans les sous-GCs doit être un multiple du nombre de segments du sur-GC correspondant, de manière à ce que les nœuds des sous-GCs et du sur-GC (appelés respectivement *sous-nœuds* et *sur-nœuds* dans la suite) puissent être facilement identifiés.
- On suppose que les GCs ont des sections transversales circulaires. Ce choix peut apparaître limitant par rapport à la complexité des formes de mèches que l'on souhaite voir apparaître au cours du mouvement, mais de telle formes pourront naturellement émerger au cours de l'animation grâce au processus de subdivision de mèches en sous-mèches. Cette hypothèse de GC à section constante simplifie considérablement le problème de la détection des collisions par rapport à l'approche de Plante *et al.* [PCP01] (basée sur des enveloppes de mèches déformables), puisqu'un seul rayon par section transversale suffira alors à déterminer s'il y a interpénétration ou non.
- L'approche de Kim et Neumann [KN02] n'impose pas que le contour extérieur d'un sur-GC englobe tous ses sous-GCs. Dans notre cas, la frontière d'un sur-GC est modifiée de façon à englober la section de ses sous-GCs, dans une étape de post-traitement : étant donné un ensemble de sous-GCs, on calcule d'abord la courbe représentant le centre de gravité de cet ensemble, puis on modifie le contour du sur-GC à partir de cette courbe (une simple modification du rayon dans notre cas).

3.2 Structure mécanique multiresolution

Le mouvement de chaque GC est donné par la simulation d'un ensemble discret de nœuds (voir Figure 3.4). Un *nœud* correspond au centre de la section du GC dans la hiérarchie du modèle géométrique. À chaque section d'une mèche grossière correspond donc une hiérarchie de nœuds (les sections des différents GC hiérarchisés de la mèche coïncident), chacun de ces nœuds correspondant à un certain niveau de détail pour la section. Selon qu'ils appartiennent au sur-GC ou à l'un des sous-GCs nous appellerons respectivement ces nœuds *sur-nœuds* et *sous-nœuds*. Dans l'implémentation, on stocke pour chaque nœud des pointeurs vers son sur-nœud et ses sous-nœuds correspondants, ainsi

que le rayon de la section du GC associé. La masse du nœud est déduite du nombre de cheveux représentés par ce nœud.

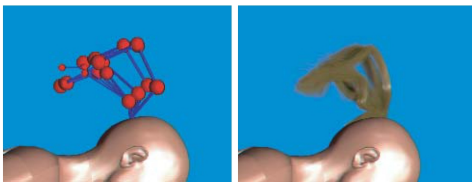


FIG. 3.4: *L'image de gauche illustre l'AAM. Les nœuds actifs sont représentés comme des sphères, et les segments actifs comme des cylindres. L'image de droite montre le rendu de cheveux correspondant.*

À chaque pas de temps, seul un nœud par section (*i.e.* un niveau de détail) est *actif*, c'est à dire animé. L'ensemble des nœuds actifs du modèle géométrique à un pas de temps donné forme exactement l'ensemble des nœuds de l'AAM à ce même pas de temps. On appelle *segment* une arête qui relie dans l'espace (et non à travers les niveaux hiérarchiques) un nœud d'une section de GC (à une résolution donnée), avec un nœud appartenant à une section spatialement voisine (à une résolution donnée). Les *segments actifs* du modèle désignent ainsi les arêtes reliant les nœuds actifs, le tout formant un graphe ayant une structure arborescente (voir Figure 3.8).

Les subdivisions et fusions dans l'AAM correspondent ainsi à des changements de niveau de détail dans le modèle géométrique (la hiérarchie de niveaux de détail du modèle géométrique restant inchangée au cours de l'animation). Ces subdivisions et fusions dynamiques garantissent que la structure arborescente de l'AAM est préservée (voir Section 4).

3.3 Animation

En pratique, un AAM est construit pour chaque GC de niveau le plus grossier dans le modèle géométrique de la coiffure ; la chevelure entière est donc animée comme un ensemble d'AAMs (un AAM correspond à une "grosse mèche" de la chevelure). Au début de la simulation, chaque AAM est initialisé avec comme nœuds actifs uniquement les nœuds les plus grossiers. Au cours de l'animation, les AAMs évoluent grâce aux procédés de subdivision et de fusion décrits en Section 4.

Les segments de l'AAM sont simulés soit comme des liens rigides, soit comme des liens mous, selon le comportement désiré. Puisqu'une mèche bouclée est susceptible de s'allonger au cours du mouvement, on a choisi d'utiliser des ressorts mous pour simuler les chevelures bouclées, tandis que des ressorts très raides ont servi à modéliser les cheveux raides. Les conditions extérieures telles que la gravité, le mouvement de la tête, les collisions, le frottement de l'air, etc. affectent le mouvement des AAMs qui sont contraints par le modèle dynamique, qui est décrit ci-dessous.

Modèle physique utilisé

Le modèle physique que l'on anime est constitué d'un ensemble fini d'arbres orientés (voir Figure 3.5) qu'on appellera *graphe de mèches* (ou éventuellement *squelette d'animation*) dans la suite. Chaque nœud représente une *particule* physique (dotée d'une masse), et chaque arête un *lien* entre deux particules, se comportant un peu comme un ressort, pouvant être mou ou, au contraire, très rigide. L'action exacte d'un lien sur deux particules sera explicitée un peu plus loin, lors de la description du schéma numérique utilisé.

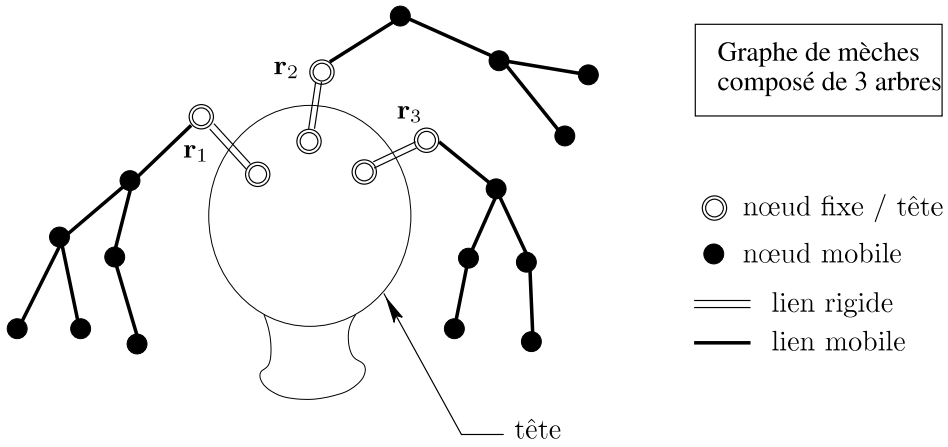


FIG. 3.5: *Structure d'un graphe de chevelure.*

Chacun des arbres peut subir des subdivisions et des fusions locales au cours du temps, et nous décrirons précisément ces processus adaptatifs en Section 4. Un arbre est encastré dans le cuir chevelu de la manière suivante :

- Le nœud racine d'un arbre n'a qu'une seule arête adjacente.
- L'unique arête reliant la racine à un autre nœud représente un lien rigide et fixe dans le repère de la tête (c'est lui qui donne l'orientation de la mèche), et chacune des deux particules de part et d'autre de ce lien sont également fixes dans le repère de la tête. Cette partie de l'arbre n'est donc jamais simulée (la position et la vitesse des nœuds en jeu ne dépendent que du mouvement de la tête).

Intégration au cours du temps

Notre système physique est composé d'un ensemble de chaînes de particules, chacune de ces chaîne étant encastrée en une extrémité sur le cuir chevelu (cette contrainte est satisfaite en mettant simplement à la racine une particule de masse nulle), l'autre extrémité restant libre. Les particules sont liées entre elles par des liens élastiques similaires à des ressorts. On numérotera les particules de 0 à $N-1$ depuis la racine vers la pointe, N étant le nombre de particules composant la chaîne. Cependant, nous utilisons ici un algorithme d'intégration numérique un peu différent des masses-ressorts traditionnels, afin de prendre en compte de manière efficace et stable de grandes déformations en flexion du système, tout en maintenant les chaînes à une longueur rigoureusement constante.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, le but d'un schéma d'intégration numérique est de calculer l'état d'un système dynamique à l'instant $t+dt$, connaissant l'état de ce même système aux instants précédents (et éventuellement en fonction de l'état suivant dans le cas d'une intégration implicite). Notre problème d'intégration se formule ici de la manière suivante. Pour chaque particule i d'une chaîne donnée :

- On connaît sa position $\mathbf{x}_i(t)$ et sa vitesse $\mathbf{v}_i(t)$ au temps t.
- On cherche sa position $\mathbf{x}_i(t+\delta t)$ et sa vitesse $\mathbf{v}_i(t+\delta t)$ au temps suivant.

Le schéma numérique que l'on utilise pour calculer l'état des particules à l'instant $t+\delta t$, connaissant l'instant t, se base sur l'algorithme mis au point par Lyard et Faure en 2002 [Lya02]. Leur but était d'obtenir un schéma rapide (pouvant admettre des grands pas de temps sans diverger), et permettant de simuler des liens relativement rigides. Ayant remarqué que les instabilités obtenues par les méthodes d'intégration classiques proviennent de l'intégration des forces élastiques entre particules au cours d'un pas de temps très grand, ils ont proposé un algorithme d'intégration prenant en compte

séparément les forces extérieures au système et les forces de liaison interne. Le principe de ce schéma d'intégration numérique est le suivant :

1. Dans un premier temps, l'ensemble des forces externes au système (poids, collisions entre mèches, frottement de l'air, etc.) sont intégrées en utilisant le schéma d'Euler explicite d'ordre 1.
2. Ensuite, l'ensemble des forces internes au système (*i.e.* les forces exercées par les liens sur les particules) sont prises en compte par *modification directe* des vitesses obtenues, grâce à l'utilisation d'une *pseudo-raideur* [Lya02] permettant de ramener la chaîne vers sa longueur au repos. Cette étape de correction est itérative, elle est exécutée *NbPasses* fois (en pratique, nous avons obtenu de bons résultats en choisissant $NbPasses = 5$).
3. Enfin, les positions sont déduites des vitesses de manière classique.

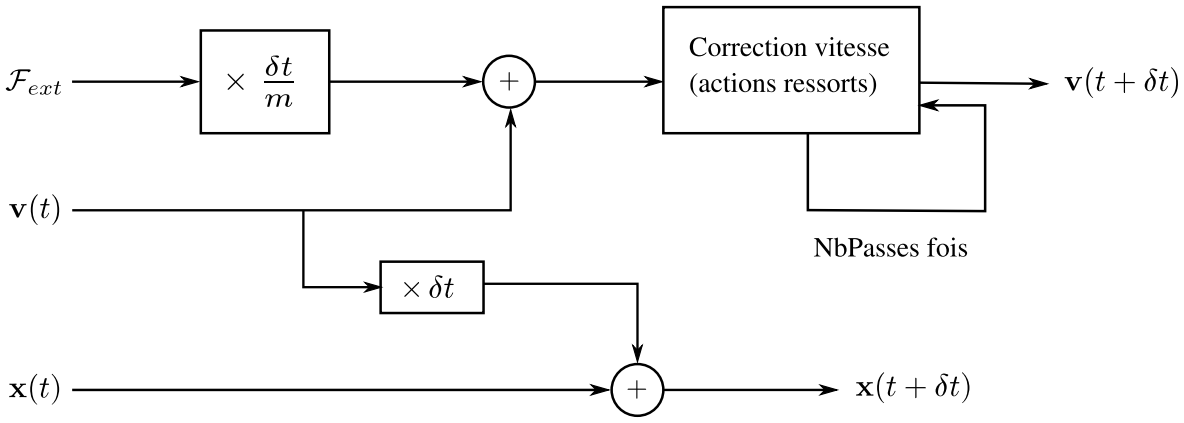


FIG. 3.6: *Schéma d'intégration numérique de Lyard [Lya02].*

Notons que la dernière étape, correspondant au calcul des positions à $t+\delta t$, peut se faire autrement, en utilisant non pas les $\mathbf{v}_i(t)$ mais les nouvelles $\mathbf{v}_i(t+\delta t)$: $\mathbf{x}_i(t+\delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \delta t\, \mathbf{v}_i(t+dt)$. On obtient alors un schéma semi-implicite, et c'est ce que l'on a utilisé en pratique pour une meilleure stabilité.

Afin d'obtenir un algorithme garantissant à la chaîne de particules une flexion rigide, ainsi qu'une longueur parfaitement constante, nous avons complété la méthode précédente par deux apports :

1. L'ajout d'une force de liaison angulaire élastique $\mathbf{F_{bend}}^i$ pour chaque particule i, intégrée en même temps que les forces extérieures (étape 1). Cette force est calculée à partir de l'angle α_i formé par les deux liens autour de la particule i :

$$\mathbf{F_{bend}}^i = -k_a\,(\alpha_i - \alpha_i^0)\,\frac{\mathbf{\Omega}_i \wedge (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{\Omega}_i \wedge (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)\|},$$

   où $\mathbf{\Omega}_i = (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i) \wedge (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)$ est le vecteur rotation entre les deux liens autour de la particule i, α_i^0 l'angle au repos entre les deux liens autour de la particule i, et k_a une constante de raideur en flexion . En pratique, on choisira $\alpha_i^0 = \pi$ (chaîne rectiligne au repos) et $k_a = 0,2\mathrm{N/rad}$.
2. L'ajout d'une phase de correction des positions, après le calcul de celles-ci (étape 3), qui empêchent la chaîne de s'étirer ou de se comprimer. Cette correction est itérative, et consiste simplement à repositionner chaque particule i à la bonne distance de sa particule précédente $i-1$ (distance de repos), en la faisant glisser le long du vecteur $(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)$. Cet algorithme est effectué en parcourant la chaîne depuis la racine jusqu'à la pointe.

Cette méthode simple nous a donné de très bons résultats en termes d'efficacité (quelques centaines de chaînes simulées en temps-réel) et de stabilité (stabilité inconditionnelle).

4 Subdivisions et fusions adaptatives

L'AAM s'adapte au cours du temps en subissant des subdivisions et des fusions dynamiques. La subdivision raffine localement la chevelure en ajoutant des degrés de liberté aux endroits où le mouvement se complexifie. La fusion simplifie au contraire l'AAM lorsque différentes mèches suivent un mouvement semblable. Ce procédé adaptatif simplifie grandement la gestion des collisions au sein de la chevelure, comme nous le mettons en évidence en Section 5.

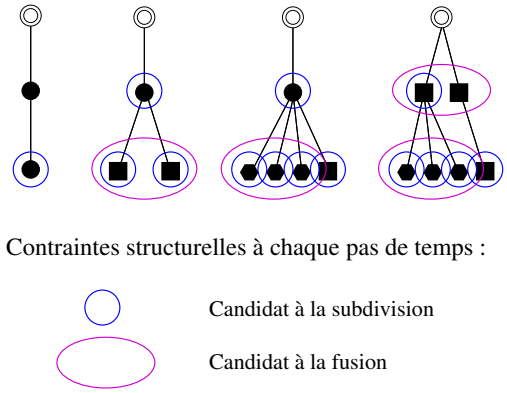


FIG. 3.7: *Exemple d'une séquence adaptative : l'arbre de mèches subit des subdivisions et des fusions au cours du temps ; à chaque pas de temps, seuls certains nœuds peuvent être candidats à l'un des processus, de par la structure de l'arbre.*

La Figure 3.7 montre que structurellement, la subdivision ne peut se produire que de bas en haut (des pointes vers les racines), et inversement, la fusion ne peut se produire que de haut en bas (des racines vers les pointes). On appellera nœud *candidat* à un processus (subdivision ou fusion) un nœud du graphe de mèches qui respecte ces contraintes structurelles, nécessaires à la réalisation du processus en question. À chaque pas de temps, on détecte les nœuds candidats à l'un ou l'autre des processus puis on les soumet à des tests portant sur des critères géométriques et cinématiques.

4.1 Subdivision

Le processus de subdivision consiste à subdiviser un nœud candidat en ses sous-nœuds hiérachiques lorsque son accélération devient suffisamment grande. Pour effectuer le processus de subdivision dans tout le graphe de mèches, on examine successivement les différents nœuds du graphe, en partant des racines. Si la subdivision a effectivement lieu, on ne parcourt pas les nœuds placés dans le sous-arbre ayant pour parent le nœud qui vient de se subdiviser, on passe aux autres nœuds. Sinon, on descend dans l'arbre pour regarder si une subdivision peut se produire plus bas.

Un nœud se subdivise si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Son accélération multipliée par son rayon dépasse un certain seuil.
2. Son nœud enfant dans l'arbre s'est déjà subdivisé.

La condition 1 modélise le fait qu'une mèche épaisse et en mouvement rapide a plus de chances de se subdiviser que les autres. La condition 2 force la subdivision à se produire des pointes vers

les racines. Le processus de subdivision est illustré sur les Figures 3.7 et 3.8. Lorsqu'un nœud se subdivise en plusieurs sous-nœuds :

– La position de chaque sous-nœud, stockée dans le repère local de son sur-nœud (correspondant au nœud considéré) à l'initialisation ou lors de la dernière fusion produite, est calculée dans le repère du monde grâce à la position courante du sur-nœud en train de se subdiviser.
– La vitesse des sous-nœuds est réinitialisée avec la vitesse courante du sur-nœud.

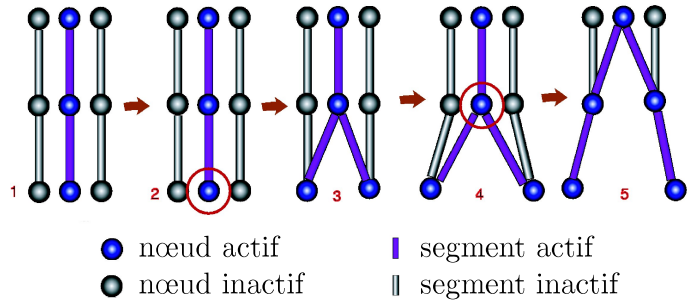


FIG. 3.8: *Le procédé de subdivision. 1. Initialement, seuls les nœuds grossiers sont activés. 2. Le nœud à l'intérieur du cercle vérifie le critère de subdivision. 3. Ses sous-nœuds sont activés. 4. Après quelques pas de temps, le nœud à l'intérieur du cercle est candidat à la subdivision. 5. L'AAM qui résulte de cette nouvelle subdivision.*

4.2 Fusion

Le processus de fusion est le processus inverse de la subdivision : il consiste à fusionner un ensemble de nœuds ayant le même sur-nœud, pourvu que ces nœuds remplissent certains critères géométriques et cinématiques. Le parcours des nœuds est similaire au parcours effectué pour la subdivision : on regarde successivement les ensembles de nœuds actifs ayant le même sur-nœud (ces nœuds sont forcément frères dans le graphe de mèches). Si la fusion a effectivement lieu, on n'examine pas les nœuds placés dans l'arbre ayant pour racine le nouveau nœud issu de la fusion, on passe aux autres nœuds. Sinon, on descend dans l'arbre pour regarder si une fusion peut se produire plus bas.

Les nœuds issus du *même parent* (*i.e.* frères dans l'AAM) fusionnent si leur sur-nœud donne une approximation suffisante de leur mouvement. Plusieurs nœuds peuvent fusionner ensemble s'ils vérifient les trois conditions suivantes :

1. Les nœuds sont contenus à l'intérieur de la section rayon de leur sur-nœud.
2. Les normes de leurs vitesses relatives sont inférieures à un certain seuil, afin d'éviter de trop grandes discontinuités en vitesse lors de la fusion.
3. La condition 1 de subdivision n'est pas vérifiée (ce test est ajouté pour empêcher que des nœuds qui viennent juste de fusionner se subdivisent immédiatement à nouveau).

Ce test de fusion est local : il est uniquement effectué pour des nœuds ayant le même parent dans l'arbre. La structure arborescente de l'arbre de mèches est bien préservée puisque la fusion se produit des racines vers les pointes.

Lorsque plusieurs nœuds frères dans l'AAM fusionnent en leur sur-nœud :

– Le sur-nœud est positionné au centre de gravité des nœuds qui fusionnent, et sa vitesse est prise égale à la moyenne des vitesses des sous-nœuds pondérées par les masses de celles-ci. Le rayon de la section du sur-nœud est légèrement modifiée de manière à englober étroitement tous les sous-nœuds qui fusionnent.

– La position courante de chacun des sous-nœuds est alors stockée (et gelée) dans le repère local du sur-nœud : elle servira à mettre à jour la position des sous-nœuds lors de la prochaine subdivision.

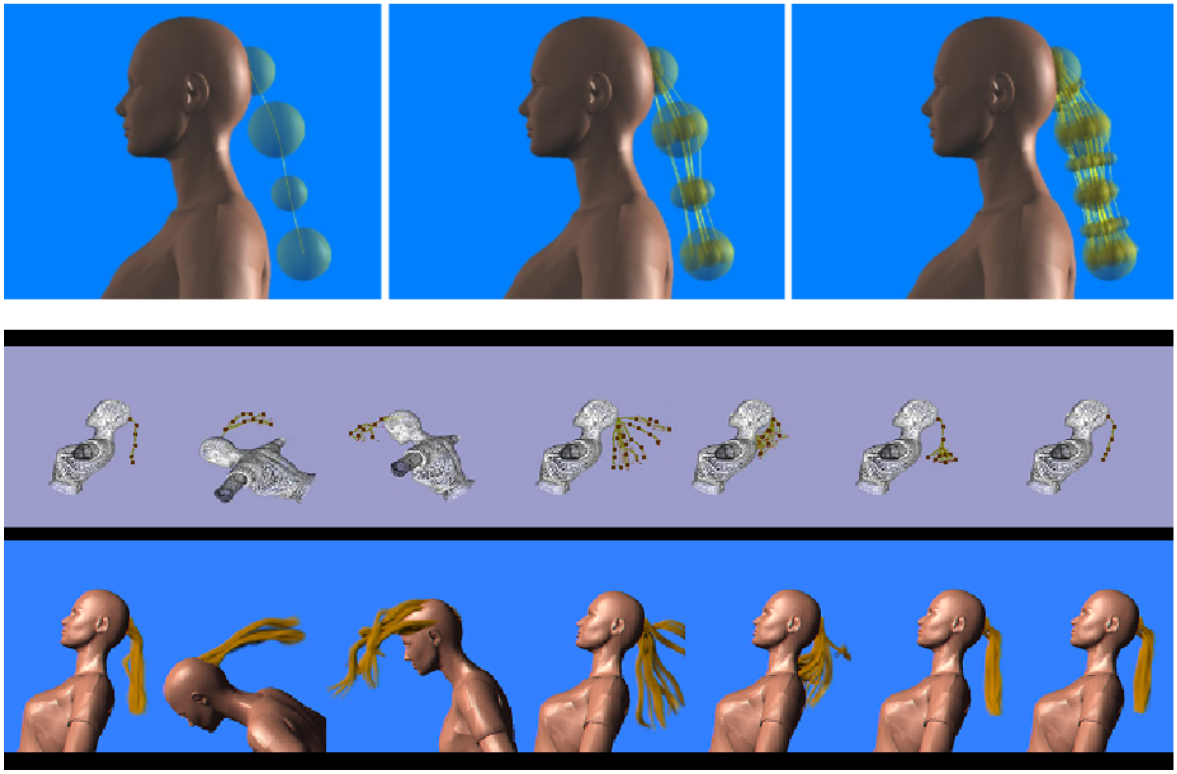


FIG. 3.9: *Animation adaptative d'une queue de cheval, représentée à l'aide d'un unique AAM (une seule mèche grossière). En haut : géométrie multirésolution de la queue de cheval (trois niveaux de détail). En bas : séquence animée sur un mouvement de pencher en avant, au cours duquel l'AAM se subdivise, des pointes vers les racines, jusqu'au niveau de détail le plus fin, puis refusionne lorsque le mouvement ralentit, des racines vers les pointes. La séquence montre d'une part directement l'AAM, d'autre part le rendu final appliqué à cette animation, qui est calculé à chaque instant à partir des positions des nœuds au niveau de détail le plus fin (nœuds pas nécessairement actifs).*

5 Gestion des interactions

Un des avantages de l'AAM est qu'il modélise de manière implicite les interactions mutuelles des cheveux : grâce à cette structure, les mèches voisines qui ont des mouvements similaires fusionnent, imitant ainsi le frottement statique qui se produit dans une chevelure réelle. Ce processus évite ainsi d'avoir à traiter spécifiquement les collisions entre mèches, et donc permet d'accroître l'efficacité et la stabilité de la méthode, de par le nombre limité de primitives animées.

Le traitement des interactions entre cheveux est inspiré du modèle d'interactions anisotropes de Plante *et al.* [PCP02] (voir Figure 3.11). L'intérêt d'utiliser une structure multirésolution pour la chevelure est de pouvoir modéliser chaque section de mèche par un cylindre indéformable (la déformation des mèches est prise en compte dans le changement de niveau de détail), ce qui facilite évidemment beaucoup la gestion des collisions.

5.1 Interaction entre la chevelure et le corps

Le corps est approché par une liste de sphères. Chaque nœud du graphe de mèches est approché également par une enveloppe sphérique (le rayon est bien sûr issu de la modélisation initiale de la coiffure). La détection de collision est donc très simple à calculer (test sur une distance). Le corps pouvant, à notre échelle, être considéré comme un objet rigide, la réponse à la collision est effectuée en modifiant directement la position et la vitesse du nœud en pénétration avec le corps (impulsion appliquée au nœud), comme illustré sur la figure ci-dessous.

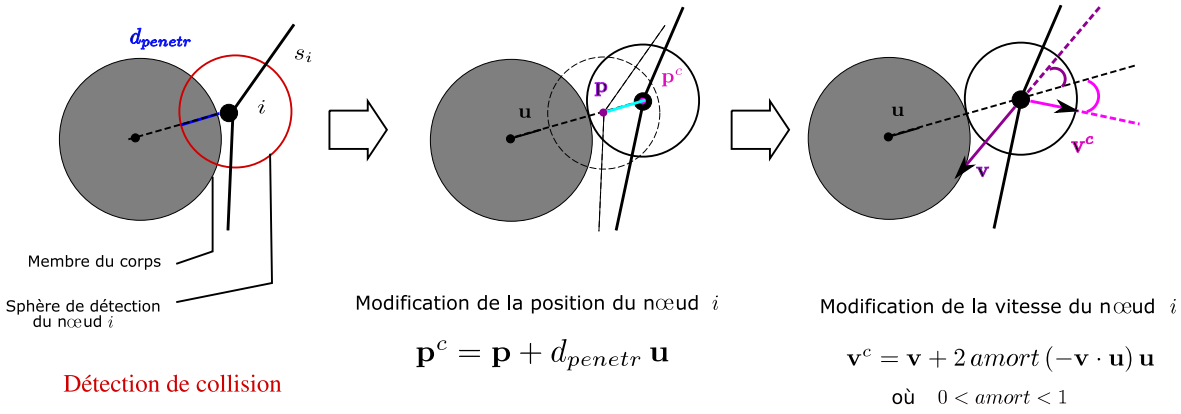


FIG. 3.10: *Réponse à la collision entre les cheveux et le corps, approché par une série de sphères.*

Ce traitement des collisions est assez approximatif, mais semble suffisant pour rendre compte des interactions entre le corps et la chevelure (les membres du corps sont généralement beaucoup plus épais que les segments de mèches, donc la détection de collision est, en général, garantie).
D'autre part, le corps étant beaucoup plus lourd que les cheveux, il est raisonnable de n'agir que sur le nœud du segment de mèche (cela revient à dire que la force opposée appliquée par le nœud sur le membre du corps n'a aucun effet sur le corps).
On remarquera qu'on n'applique aucune force de frottement entre le corps et la mèche. Ceci fait partie des améliorations possibles.

5.2 Gestion des collisions entre mèches

Accélération de la détection

Pour éviter un parcours naïf des segments de la chevelure, qui conduirait à un coût de calcul quadratique en nombre de segments, nous utilisons une grille 3D mise à jour à chaque pas de temps, dont les cellules stockent à chaque instant la liste des segments qui intersectent la portion de l'espace correspondante. À chaque pas de temps, on teste alors uniquement l'interpénétration des segments se trouvant dans la même cellule de la grille, ce qui limite considérablement le nombre de tests à effectuer, en particulier lorsque la chevelure comporte un grand nombre de mèches.

La grille 3D est représentée par une table de hachage, associée à la fonction de hachage suivante :

$$index : pos3D \longrightarrow ptr_cell(pos3D)$$

où $pos3D$ est un vecteur position de l'espace, et $ptr_cell(pos3D)$ l'indice de la cellule de la grille 3D contenant cette position.

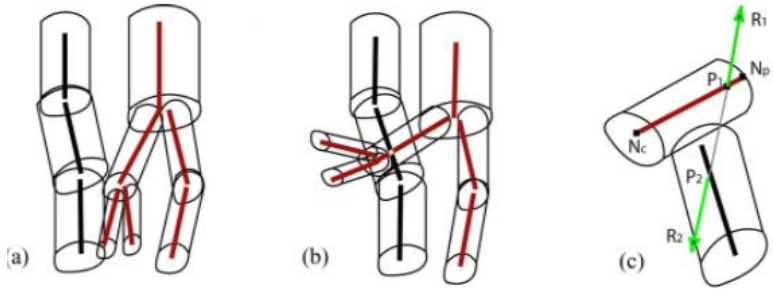


FIG. 3.11: *Les interactions entre mèches sont détectées efficacement, car les segments de mèches sont de simples cylindres. (a) Des forces de frottement sont générées entre deux segments parallèles ; (b) des forces de répulsion sont appliquées entre deux segments non parallèles ; (c) la réponse à la collision est calculée aux points les plus proches, et distribuée ensuite aux nœuds simulés comme des masses ponctuelles.*

Réponse

Notre traitement des interactions entre mèches est basé sur une méthode de pénalité, et s'inspire du modèle de collision anisotrope de Plante *et al.* [PCP02]. Ainsi, les segments de mèches orientés de manière similaire peuvent s'interpénétrer, et sont dans ce cas soumis à des forces de frottement visqueux. On empêche par contre l'interpénétration entre les segments d'orientations trop différentes en les soumettant à des forces élastiques répulsives (forces de pénalité), qui permettent d'éviter le croisement des mèches (voir Figure 3.11, (a) et (b)).

On modélise ce comportement anisotrope à l'aide de forces de frottement visqueux $\mathbf{V_1}$ and $\mathbf{V_2}$, calculées aux points les plus proches $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ sur les deux segments en collision,

$$\mathbf{V_1} = k_f\,(\dot{\mathbf{P}}_2 - \dot{\mathbf{P}}_1); \quad \mathbf{V_2} = -\mathbf{V_1}, \tag{3.1}$$

et en ajoutant des forces de répulsion $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ lorsque l'angle entre les deux segments est supérieur à un certain seuil :

$$\mathbf{R_1} = k_r\,(r-d)\,\frac{(\mathbf{P_1}-\mathbf{P_2})}{\|\mathbf{P_1}-\mathbf{P_2}\|}; \quad \mathbf{R_2} = -\mathbf{R_1}, \tag{3.2}$$

où r est la somme des rayons des deux morceaux de mèches, d la distance entre les deux segments de mèche, k_f un coefficient de frottement et k_r un coefficient de raideur.

La force résultante $\mathbf{F} = \mathbf{V} + \mathbf{R}$ en $\mathbf{P}$ (où $\mathbf{P}$ représente $\mathbf{P_1}$ ou $\mathbf{P_2}$) est alors répartie selon deux forces $\mathbf{F_p}$ et $\mathbf{F_c}$ appliquées respectivement aux nœuds $\mathbf{N_p}$ et $\mathbf{N_c}$ des extrémités du segment (voir Figure 3.11, (c)) : si $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{N_p} + (1-\lambda)\,\mathbf{N_c}$, alors

$$\mathbf{F_p} = \lambda\mathbf{F}; \quad \mathbf{F_c} = (1-\lambda)\mathbf{F}. \tag{3.3}$$

Le coefficient de frottement k_f utilisé dans l'équation (3.1) doit varier selon le niveau de détail hiérarchique du segment de mèche. Les forces de frottement doivent permettre de réduire la norme de la vitesse relative entre les nœuds, mais ne doivent en aucun cas changer la direction de la vitesse relative ; ce problème peut survenir dans le cas où la masse est trop petite par rapport à la force appliquée. Afin de maintenir k_f à une valeur raisonnable tout en garantissant un frottement équivalent à tous les niveaux de détail, nous utilisons : $k_f = \alpha m$, où m est la masse du nœud enfant N_c. Nous vérifions aussi que le pas de temps est suffisamment faible pour éviter l'inversion des vitesses relatives ($\alpha\delta t < 1$).

6 Résultats et discussion

Dans les exemples présentés, la masse de chaque nœud grossier a été fixée de manière à ce que la masse totale de la chevelure atteigne entre 500 g et 2 kg (à peu près 1 g par nœud grossier), sachant que le processus de subdivision assure bien évidemment la conservation de la masse de la chevelure. Par le biais d'une interface interactive, l'utilisateur peut faire varier le seuil de subdivision entre $0,1$ et $0,5\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. La valeur choisie dépend de la proportion de subdivision que l'on souhaite au cours du mouvement ; pour des cheveux bouclés par exemple, généralement caractérisés par une tendance à rester groupés en mèches, on choisira une valeur assez forte (peu de subdivision), tandis que pour des cheveux lisses, on pourra choisir une valeur plus faible (davantage de séparation en sous-mèches), de telle sorte que la chevelure puisse s'étendre visiblement au cours du mouvement. Pour l'animation de cheveux bouclés, nous avons ainsi activé seulement 2 niveaux de détail, tandis que 3 niveaux ont été utilisés pour la simulation de cheveux lisses, permettant d'obtenir un bon compromis entre réalisme visuel et efficacité des calculs. Plus de niveaux de détail pourraient être employés pour augmenter le réalisme visuel de ces animations.

Résultats qualitatifs

Quelques résultats sont illustrés ci-après. Différents styles de coiffure ont ainsi été simulés pour différents types de mouvement. Grâce au procédé de fusion, le mouvement des cheveux se stabilise lorsque la chevelure revient au repos, car les micro-collisions entre petites mèches voisines sont alors évitées.

Les animations montrées sur la Figure 3.12 ont été rendues en affichant environ 10000 cheveux individuels. Le rendu de notre méthode a été effectué par Kim, en utilisant une version modifiée des cartes d'opacité [KN01] pour le calcul de l'auto-ombrage. Le modèle local de réflexion utilisé est celui de Kajiya-Kay [KK89], implémenté sur la carte graphique. Pour chaque image, les cheveux individuels sont tracés comme des polylines OpenGL, avec un antialiasage basé sur un algorithme de tri défini dans [KN02]. Le coût du rendu peut varier d'environ une fraction de seconde à quelques secondes par image, selon la précision souhaitée.

Performances

Modèle de cheveux animé (N, L)	Algorithme naïf temps/image (s)	Algorithme adaptatif temps moyen/image (s)
Court (5149, 2)	3,1	0,32
Court bouclé (4909, 2)	2,7	0,27
Long (6065, 3)	3,8	0,09
Long bouclé (9853, 3)	7,9	0,29

TAB. 3.1: *Performances de l'algorithme adaptatif.*

Le tableau ci-dessus compare notre méthode adaptative avec l'algorithme naïf qui consisterait à simuler le niveau de détail le plus fin tout au long de l'animation. Le tableau indique le temps (en secondes) mis pour calculer un pas d'animation, pour quatre types différents de chevelures (N indique le nombre total de nœuds de la hiérarchie au niveau le plus fin, et L le nombre de niveaux de détail simulés pour chaque coiffure) et pour un mouvement du personnage identique dans les quatre cas. Ces valeurs ont été obtenues en simulant l'algorithme sur un processeur Pentium de 1.7 GHz. Nous avons utilisé 4 pas d'intégration par image (*i.e.*, $\mathrm{d}t = 10ms$). Le calcul pour une animation de 10 secondes a pris au maximum 5 minutes.

7 Bilan

En terme de performances, on constate que notre algorithme est efficace : les chevelures sont animées avec un coût très raisonnable, en comparaison avec les heures de calcul nécessaires à la méthode de Plante *et al.* [PCP02], qui utilise de manière similaire des mèches volumiques pour l'animation mais sans exploiter la multirésolution. Nos temps de calcul sont comparables à ceux de Ward *et al.* [WLL$^+$03] obtenus avec une représentation de la chevelure par niveaux de détail. Notre approche a également l'avantage de pouvoir traiter des mouvements importants de la chevelure, contrairement à la plupart des méthodes qui ne montrent que les mouvements lents de chevelures lors de légers mouvements de la tête, ou sous un léger vent.

Cependant, notre méthode ne prend pas en compte les déformations géométriques d'une mèche ; les mèches restent donc toujours assez visibles (même si elles changent de niveau de détail), ce qui n'est pas toujours souhaitable, surtout lorsque l'on veut animer une chevelure très lisse. Dans ce cas, des méthodes basées sur des interpolations locales entre cheveux sont certainement plus appropriées. De plus, nos critères de subdivision et de fusion ont été définis de manière très *ad hoc*, et ces choix mériteraient donc d'être approfondis. Enfin, le modèle physique utilisé dans cette approche est très approximatif donc peu réaliste. Dans la suite de nos travaux (Chapitres 5, 6, et 7), nous nous proposons de construire un modèle de chevelure mécaniquement réaliste.



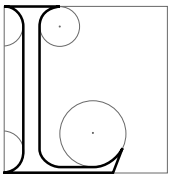
FIG. 3.12: *Animations finales. De haut en bas : des cheveux courts et lisses dans un mouvement de course ; des cheveux longs et épais dans un mouvement de pencher en avant ; des cheveux longs bouclés dans un mouvement de pencher en avant ; des cheveux courts et bouclés dans un mouvement de pencher en avant.*

CHAPITRE 4

Représentation volumique de la chevelure pour le rendu

A certaines heures, la campagne est noire de soleil. Les yeux tentent vainement de saisir autre chose que des gouttes de lumière et de couleurs qui tremblent au bord des cils.

CAMUS, *Noces à Tipasa*



E travail effectué au cours de cette thèse sur le rendu de cheveux a été essentiellement motivé par le besoin nettement ressenti de disposer d'une technique à la fois simple, rapide et précise, pour nous permettre de visualiser des chevelures en mouvement, animées par les différentes approches dynamiques que nous avons mises au point. En effet, un rendu suffisamment réaliste d'une chevelure animée offre, d'une part, un outil de visualisation précis qui peut s'avérer très utile pour étudier et comprendre les problèmes liés à une méthode d'animation spécifique (en particulier, la manière dont les contacts entre cheveux sont gérés est très peu visible si les cheveux ne sont pas ombrés, car on ne perçoit pas le relief ni les recouvrements éventuels). D'autre part, disposer d'une technique de rendu réaliste de cheveux correspond bien évidemment aussi à un moyen de valoriser nos techniques d'animation, et de pouvoir présenter nos résultats à la communauté graphique.

Ce chapitre présente un nouvel algorithme, à la fois rapide et précis, pour calculer l'auto-ombrage d'une chevelure animée. Notre méthode se base sur une carte de densité 3D, orientée selon la direction de la lumière. Cette structure originale combine une représentation volumique de la chevelure avec une partition de l'espace orientée selon la lumière supposée unidirectionnelle. Grâce à cette carte 3D (appelée dans la suite *carte d'ombre* ou tout simplement *grille*), l'auto-ombrage de cheveux peut être calculé de manière précise en des temps interactifs (quelques images par seconde pour une coiffure complète) sur un CPU standard. Non seulement, notre application ne dépend pas d'extensions

spécifiques de cartes graphiques (et donc elle est portable), mais elle peut également être distribuée facilement sur plusieurs CPUs, ce qui permet encore d'accroître ses performances. La méthode est particulièrement adaptée au rendu de chevelures animées, car aucun précalcul sur la géométrie de la chevelure n'est requis ; de plus les structures de données en jeu sont rapidement remises à jour à chaque pas de temps. En outre, elle offre une méthode alternative, très efficace, pour gérer de manière volumique les interactions mécaniques entre cheveux à chaque pas de temps. Nos résultats illustrent le réalisme du rendu et la rapidité de la méthode sur la chevelure d'un personnage animé par différents mouvements de danse.

Ce travail a été mené en collaboration avec Clément Ménier, en thèse dans les l'équipes MOVI (Laboratoire GRAVIR-IMAG) et APACHE (Laboratoire ID-IMAG), qui a participé à l'optimisation des différents algorithmes mis en œuvre, et implémenté une version parallélisée de l'approche. Le présent chapitre a fait l'objet d'une publication à *Graphics Interface* en 2005 [BMC05] (prix du meilleur papier étudiant).

1 Contexte

L'apparence réaliste ou non d'un objet composite (tel qu'une chevelure) dépend beaucoup des ombres projetées par le matériau sur lui-même, comme nous avons pu le mettre en évidence dans l'état de l'art au Chapitre 1. En effet, ce phénomène d'auto-ombrage contribue très nettement à conférer une apparence de *volume* à l'objet de synthèse (voir Figure 4.1). Dans le cas d'une chevelure complète, composée d'une centaine de milliers de fibres très fines et translucides, ce phénomène est d'autant plus difficile à reproduire de manière à la fois convaincante et efficace.

1.1 Animation et rendu interactifs de cheveux

Récemment, plusieurs travaux se sont penchés sur l'animation interactive de cheveux [WL03, BCN03]. Le travail que nous avons présenté au chapitre précédent suivait également cet objectif. Mais la plupart du temps, les bonnes performances obtenues par toutes ces approches n'incluent que le coût de l'animation, tandis que le rendu des cheveux est calculé en post-traitement, et donc n'est pas considéré comme faisant partie de la simulation.

Les approches qui visent l'auto-ombrage interactif sont très récentes, et s'appuient pour la plupart sur les avancées remarquables, ces dernières années, des cartes graphiques [MKBR04, KHS04]. Bien que performantes, ces méthodes sont fortement dépendantes de l'architecture matérielle de la machine sur laquelle le code est exécuté (*i.e.* du type de processeur graphique), et restent également difficiles à implémenter. Nous proposons une solution alternative, basée essentiellement sur le CPU et sur les fonctionnalités standard des cartes graphiques. Notre technique s'avère très simple à implémenter (une centaine de lignes de code), flexible, tout en garantissant les mêmes performances que les approches utilisant la programmation sur processeur graphique.

1.2 Cartes d'ombre 2D et rendu volumique

Un état de l'art complet sur le rendu de cheveux a été présenté au Chapitre 1. De manière générale, on peut distinguer deux types d'approches pour projeter de l'ombre dans des objets volumétriques : les *cartes d'ombre 2D*, et le lancer de rayon à travers une grille de *densité volumique*.

Les méthodes de rendu volumique, utilisées surtout dans les années 80 mais assez peu récemment, et rarement appliquées au cas des cheveux, utilisent une représentation avantageuse des objets semi-transparents, sous la forme d'une carte de densité 3D. Cependant, l'étape de tracer de rayons peut s'avérer très coûteuse, puisqu'elle exige le calcul et le tri d'intersections multiples entre les rayons

et les objets qui doivent être ombrés. Les cartes d'ombre 2D tirent justement parti d'un échantillonnage de la géométrie de la scène suivant la direction de la lumière, pour accélérer le calcul de la transmittance. Notre méthode s'inspire en fait de ces deux types d'approches : la représentation de la chevelure par une grille volumique de densité, orientée selon la direction de la lumière, nous permet de définir un algorithme d'auto-ombrage à la fois simple et interactif.

Pour générer le rendu final d'une chevelure, nous utilisons ici le modèle d'illumination locale efficace de Kajiya et Kay [KK89], présenté au Chapitre 1. Notons cependant que notre algorithme d'auto-ombrage pourrait être combiné avec n'importe quel autre modèle d'illumination locale, par exemple avec le modèle plus réaliste - mais aussi plus coûteux - de Marschner *et al.* [MJC+03]. C'est d'ailleurs ce que nous ferons aux Chapitres 6 et 7 afin d'obtenir un rendu de haute qualité.



FIG. 4.1: *Une chevelure animée rendue sans auto-ombrage (à gauche), et la même chevelure ombrée par notre algorithme (à droite). La structure 3D, orientée selon la direction de la lumière, qui stocke les valeurs de densité de la chevelure et de transmittance (au centre). La simulation totale de la chevelure (incluant l'animation* et *le rendu) est calculée en temps interactif sur un CPU standard.*

1.3 Vue d'ensemble de la méthode

Notre but est de fournir une manière simple, précise et efficace pour projeter des ombres à l'intérieur d'une chevelure. Notre méthode doit être suffisamment flexible pour prendre en compte et accélérer le calcul de scènes virtuelles mettant en jeu des cheveux animés.

Notre principale contribution est de proposer une nouvelle structure algorithmique, appelée *carte d'ombre 3D, orientée selon la lumière*, qui s'inspire à la fois des volumes de densité 3D traditionnels (*density volumes*) et des plus récentes cartes d'ombre 2D (*2D shadow maps*), puisqu'elle combine une représentation volumique optimisée de la chevelure avec une partition de l'espace orientée selon la lumière. La structure en voxels de notre carte d'ombre 3D stocke la densité de cheveux dans l'espace ainsi que l'atténuation de la lumière à travers la chevelure, et sert à calculer la couleur finale attribuée à chaque primitive servant à tracer l'ensemble des cheveux (segments OpenGL par exemple).

Les principaux avantages de notre méthode sont listés ci-dessous :

- Notre application est portable, simple à implémenter, et permet de rendre interactivement une coiffure complète, composée de milliers de cheveux, sur un CPU standard. De plus, la méthode peut se paralléliser facilement pour dans l'optique d'une application en temps-réel.
- L'approche est particulièrement adaptée au rendu de cheveux animés, puisque les structures algorithmiques utilisées sont conçues pour permettre une mise à jour efficace de leurs données à chaque pas de temps. De plus, nous montrons que ces structures de données fournissent un moyen direct pour gérer les interactions mécaniques entre cheveux, sans coût supplémentaire.
- Notre technique ne fait aucune hypothèse sur la géométrie de la chevelure, et peut donc s'appliquer à n'importe quel type de coiffure. Nous l'avons testée sur plusieurs chevelures de types différents (lisses et bouclés), statiques ou animées.

La Section 2 décrit notre structure de carte d'ombre 3D orientée selon la lumière. La Section 3 explique comment l'auto-ombrage est effectué efficacement en utilisant cette nouvelle structure. La Section 4 présente deux extensions de la méthode : d'une part, nous montrons que notre carte 3D peut servir, en plus de la gestion des interactions lumineuses entre les cheveux, à la gestion efficace des interactions mécaniques entre cheveux ; d'autre part, nous fournissons une version parallélisée de notre algorithme, qui améliore encore les performances de la simulation. En Section 5, nous présentons les résultats obtenus, et les évaluons en termes de réalisme et de performance, avant de conclure.

2 Carte d'ombre 3D orientée selon la lumière

Notre carte d'ombre 3D est une grille cubique uniforme, qui associe à chaque voxel (ou cellule) une valeur de *densité* de cheveux, ainsi qu'une valeur de *transmittance*. Par densité de cheveux, on entend la masse de cheveux par unité de volume (densité massique). La transmittance d'une région de l'espace représente quant-à-elle la quantité de lumière qui pénètre dans cette région de l'espace, relativement à la quantité de lumière totale émise. Nous définirons plus précisément cette notion en Section 3.2.

Les différentes chevelures que nous souhaitons rendre ici sont composées d'un ensemble de segments, et par souci de simplicité, nous allons décrire notre méthode en nous plaçant sous cette hypothèse. Noter tout de même que notre algorithme pourrait s'appliquer à d'autres types de géométries, comme des surfaces polygonales par exemple. La seule contrainte est de disposer d'une fonction évaluant la densité de la géométrie de la chevelure en une région quelconque de l'espace.

2.1 Repère local orienté selon la direction de la lumière

Nous supposerons dans notre méthode que les rayons de lumière sont *parallèles* (*i.e.* issus d'une source de lumière située à l'infini). La lumière environnante peut donc être représentée par une unique direction, définie par le vecteur 3D normalisé $\mathbf{L}$. Cette hypothèse est raisonnable dans la mesure où l'on s'intéresse ici à des conditions simples d'éclairage (lumière du soleil par exemple). On évoquera la possibilité de gérer des sources ponctuelles en conclusion de ce chapitre.

Au lieu d'utiliser une structure d'orientation fixe, alignée avec les axes du repère du monde, comme c'est le cas dans les précédentes méthodes de rendu volumique, notre grille de l'espace est toujours alignée selon la direction de la lumière. Plus précisément, les axes de notre carte d'ombre sont définis par un repère local $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \mathbf{X}_{map}, \mathbf{Y}_{map}, \mathbf{Z}_{map})$ où $\mathbf{X}_{map}$ coïncide avec le vecteur normalisé $\mathbf{L}$, indiquant la direction de la lumière, et où $\mathbf{O}$ est l'origine de la carte d'ombre (voir Figure 4.4).

Comme nous le verrons en Section 3.2, cette configuration de la grille 3D est propice à l'accumulation efficace des translucidités propres à chacune des cellules, le long des rayons lumineux. Notons que pour une chevelure statique, que l'on souhaite observer sous une lumière changeante (éclairage "dynamique"), ce choix ne serait pas approprié, puisque la géométrie de la chevelure devrait alors être rééchantillonnée dans la grille à chaque fois que la lumière se déplace. Cependant, dans notre cas de chevelure animée, la géométrie de la chevelure doit de toutes façons être recalculée à chaque pas de temps, et donc la prise en compte d'un déplacement de lumière d'un pas de temps à un autre ne génère aucun sur-coût.

2.2 De l'espace objet à l'espace de la carte d'ombre

Afin d'occuper une place limitée en mémoire, notre structure de données exploite le fait que, au cours de l'animation, le volume d'une chevelure se situe toujours à l'intérieur d'une boîte englobante de taille constante, prédéterminée par la longueur de la coiffure que l'on souhaite simuler. En effet,

même si elle peut se déplacer dans n'importe quelle région de l'espace, la chevelure reste toujours attachée à la tête d'un personnage, et chaque cheveu est une structure inextensible. On peut ainsi stocker les éléments géométriques composant la chevelure à l'intérieur d'une structure spatiale *bornée*, pourvu que l'on puisse définir une fonction de correspondance entre l'espace 3D du monde virtuel, non borné (là où se déplace la chevelure), et l'espace 3D borné de cette structure. Une telle fonction de correspondance, notée $\mathbf{\Psi}$, est donnée dans la suite.

La dimension spatiale de la carte d'ombre est donc fixée et dépend uniquement de la taille maximum l_{max} des cheveux composant la chevelure. Si la dimension de la carte d'ombre est supérieure ou égale à $2\,l_{max} + h_{max}$, où h_{max} est la dimension maximale de la tête du personnage, alors on est assuré que la grille représentera toujours un volume englobant de la chevelure, à n'importe quel pas de temps (voir Figure 4.2). Bien sûr, le meilleur choix pour la dimension de la grille est le nombre minimum qui satisfait la contrainte ci-dessus.

La taille (ou résolution) de la carte d'ombre (*i.e.* le nombre de cellules qu'elle contient) dépend de la précision désirée pour l'auto-ombrage. Nous avons effectué des tests, reportés en Section 5, qui comparent les résultats visuels obtenus lorsque différentes résolutions pour la carte d'ombre sont utilisées.

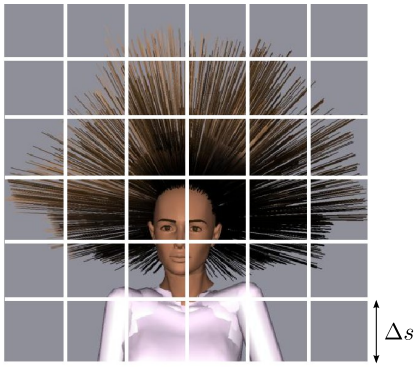


FIG. 4.2: *Taille minimale de la grille en fonction de la longueur des cheveux.*

Dans le reste de ce chapitre, N_{CELLS} dénotera le nombre de cellules de la carte d'ombre, dans chaque direction $\mathbf{X}_{map}$, $\mathbf{Y}_{map}$ et $\mathbf{Z}_{map}$ du repère $\mathcal{R}$, et Δs représentera le pas de la grille, *i.e.* la dimension spatiale de chaque cellule, supposée constante (voir Figure 4.3).

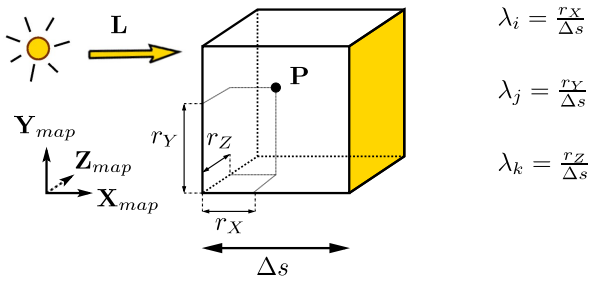


FIG. 4.3: *Une cellule de la carte d'ombre, contenant un point* **P**. *Les paramètres* λ_i *indiquent la position de P à l'intérieur de la cellule, et seront utiles à l'étape de filtrage (voir Section 3.3). Par convention, chaque cellule stocke la quantité de lumière reçue par sa face arrière (en jaune),* i.e. *la quantité de lumière qui a traversé toutes les cellules précédentes ainsi que la cellule courante.*

Pour trouver l'indice de la cellule correspondant à un point $\mathbf{P}(x,y,z)$ de l'espace, les coordonnées de **P** sont d'abord exprimées dans le repère $\mathcal{R}$ de la carte d'ombre, $(x_{map}, y_{map}$, et $z_{map})$, puis la fonction de correspondance suivante est appliquée :

$$\Psi : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0..N_{CELLS}]^3$$

$$\begin{bmatrix} x_{map} \\ y_{map} \\ z_{map} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \lfloor \frac{x_{map}}{\Delta s} \rfloor \bmod N_{CELLS} \\ \lfloor \frac{y_{map}}{\Delta s} \rfloor \bmod N_{CELLS} \\ \lfloor \frac{z_{map}}{\Delta s} \rfloor \bmod N_{CELLS} \end{bmatrix}$$

La Figure 4.4 illustre la correspondance entre l'espace objet et l'espace de la grille. Grâce à la fonction Ψ, l'accès aux éléments de la carte d'ombre s'effectue en temps constant, ce qui contribue largement à l'efficacité de la méthode.

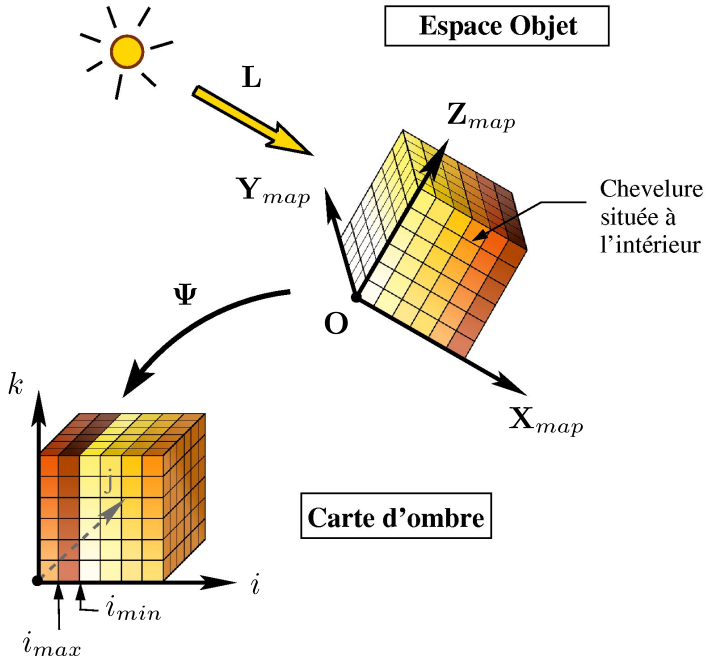


FIG. 4.4: *Correspondance entre l'espace objet et l'espace de la carte d'ombre. À cause de l'opérateur* modulo *dans la fonction de correspondance* Ψ*, la première tranche de la grille (selon l'ordre indiqué par l'arrivée de la lumière) est identifiée par* i_min*, qui ne représente pas nécessairement l'indice le plus petit. Les première et dernière tranches ont des indices consécutifs.*

3 Algorithme d'auto-ombrage

Notre algorithme d'auto-ombrage peut se décomposer en trois étapes principales : le remplissage de la grille par la densité de cheveux (1), le calcul de la transmittance (2), et le filtrage (3). Initialement, chaque cellule de la carte d'ombre a une densité nulle (nous qualifierons de *vide* une telle cellule).

La Figure 4.5 résume le pipeline complet du rendu [1].

3.1 Calcul de la carte de densité

La première étape de l'algorithme consiste à remplir la grille avec la densité de cheveux. Pour cela, on parcourt simplement la géométrie de la chevelure linéairement (dans un ordre quelconque), et on effectue les opérations suivantes :

[1] Dans notre cas, chaque cheveu est rendu comme une ligne OpenGL.

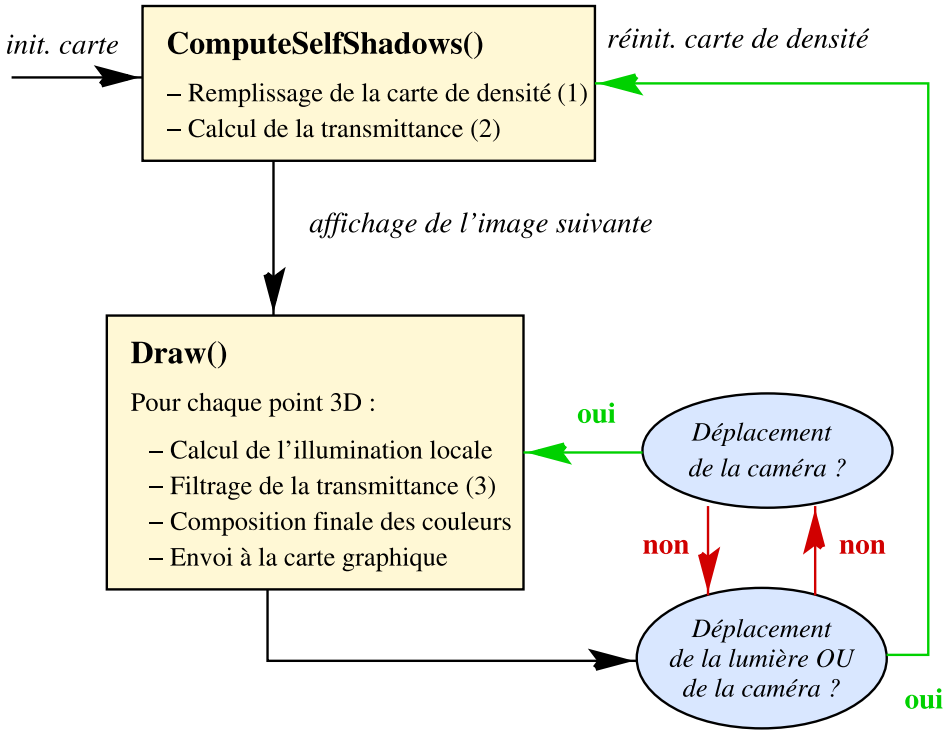


FIG. 4.5: *Le pipeline complet du rendu.*

– Chaque cheveu s_i est interpolé et échantillonné, grâce à une spline de Catmull-Rom, en *nSmooth* points $\mathbf{P}_k^i$.
– Pour chaque point $\mathbf{P}_k^i$, la densité de la cellule $\mathbf{\Psi}(\mathbf{P}_k^i)$ est incrémentée d'une unité.

Bien sûr, la valeur de densité résultante pour une cellule donnée n'a de sens que relativement aux valeurs de densité des autres cellules. En effet, chaque valeur isolée de densité est arbitraire, et dépend en particulier du nombre de points utilisés pour l'échantillonnage d'un cheveu. En supposant que l'échantillonnage des cheveux est uniforme, ce qui semble une hypothèse raisonnable, cette densité relative, multipliée par un facteur d'échelle f, donne une approximation de l'atténuation de la lumière à travers la cellule correspondante. Cette quantité est classiquement appelée paramètre d'*extinction* [LV00].

En pratique, notre échantillonnage de cheveux est le même que celui utilisé à l'étape finale de rendu, ce qui permet de garantir que chaque point affiché appartient à une cellule non-vide.

3.2 Calcul de la transmittance

La fraction de lumière qui pénètre en un point $\mathbf{P}$ de l'espace peut s'écrire [LV00] :

$$\tau(\mathbf{P}) = exp\left(-\int_0^l \zeta(l')\,dl'\right) \tag{4.1}$$

où l est la longueur du chemin parcouru par la lumière entre la source lumineuse et le point $\mathbf{P}$, et ζ la fonction d'extinction le long de ce chemin.

La fonction τ s'appelle la fonction de *transmittance*. On peut évaluer τ en échantillonnant l'espace le long du chemin lumineux, et en accumulant les translucidités des régions échantillonnées, dans la direction de la lumière.

Dans notre cas, nous avons besoin d'évaluer la fonction de transmittance dans chaque cellule de la carte d'ombre. Pour cela, nous calculons la translucidité de chaque cellule (i, j, k) :

$$t(i, j, k) = exp(-\zeta_{i,j,k}\,\Delta s) \tag{4.2}$$

où le paramètre d'extinction $\zeta_{i,j,k}$ se calcule en utilisant la valeur de la densité de la cellule (i, j, k), comme expliqué en Section 3.1 : $\zeta_{i,j,k} = f\,d_{i,j,k}$ avec $d_{i,j,k}$ la densité relative de la cellule (i, j, k) et f un facteur d'échelle qui servira dans l'interface à ajuster le niveau d'ombre souhaité.

Les translucidités sont ensuite composées ensemble, pour donner la transmittance finale de chaque cellule (i, j, k) :

$$Trans(i, j, k) = \prod_{i'=i_{min}}^{i} t(i', j, k) \tag{4.3}$$

où i_{min} est l'indice de la tranche de la carte d'ombre qui est frappée en premier par la lumière (voir Figure 4.4).

Comme mentionné dans la section précédente, la nouveauté de notre approche, en comparaison avec les méthodes précédentes utilisant les grilles de voxels, réside dans le fait que les cellules sont triées suivant la direction de la lumière : l'accumulation des translucidités peut alors s'effectuer de manière triviale, comme expliqué ci-dessous. Soit *prevTrans* un paramètre destiné à stocker à chaque étape la transmittance précédente :

- On initialise tout d'abord *prevTrans* à la valeur 1, ce qui correspond à une cellule recevant la pleine lumière (*i.e.* précédée, au sens du chemin lumineux, d'un matériau parfaitement *transparent*, tel que l'air).
- On parcourt ensuite la colonne (j, k), en partant de la tranche i_{min} (correspondant à la tranche la plus proche de la lumière), jusqu'à atteindre la tranche i_{max} (la tranche la plus éloignée de la lumière).
  - Si la cellule (i, j, k) n'est pas vide, alors on calcule sa transmittance par le produit de *prevTrans* par $t(i, j, k)$ (en utilisant l'équation (4.3)), et le paramètre *prevTrans* est mis à jour par cette même valeur.
  - Sinon, on affecte la valeur de transmittance *prevTrans* à la cellule (i, j, k).

Noter que le remplissage des densités ne génère pas nécessairement un ensemble connexe de cellules non-vides, mais que cet algorithme traite toutes les cellules, qu'elles soient vides ou non-vides. Même si au final, seuls les points appartenant à des cellules non-vides seront affichés, le fait de gérer convenablement les cellules vides est important, car de telles cellules sont susceptibles d'intervenir dans le processus de filtrage (dans le cas où une cellule non-vide a des cellules voisines vides, voir section suivante). L'algorithme décrit ci-dessus garantit donc bien que *toutes* les cellules de la carte d'ombre ont une valeur de transmittance correcte.

3.3 Filtrage et composition des couleurs

Avant d'afficher les primitives OpenGL représentant l'ensemble des cheveux, il est nécessaire de lisser les valeurs de transmittance obtenues par le processus décrit précédemment. En effet, sans filtrage, des motifs réguliers alignés avec les axes de la grille apparaissent de manière très visible, comme illustré sur la Figure 4.6.

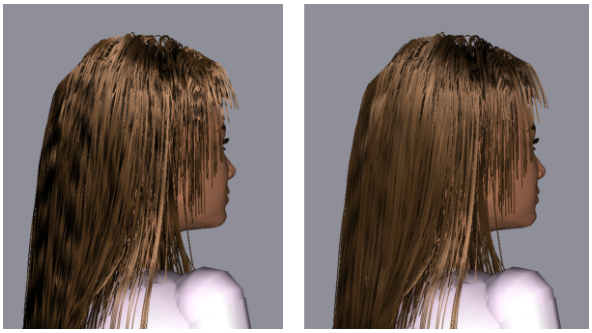


FIG. 4.6: *L'effet du filtrage sur les valeurs de transmittance. À gauche : les ombres sans filtrage : des motifs réguliers alignés avec les axes de la grille sont visibles. À droite : les ombres après filtrage : les artefacts ont disparu, l'apparence de la chevelure est satisfaisante.*

Pour chaque point **P** destiné à être envoyé au GPU pour le rendu final :

- On calcule la position relative de **P** $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ par rapport à sa cellule correspondante $\mathbf{\Psi}(\mathbf{P})$ (voir Figure 4.3).
- On filtre la transmittance au point **P** en appliquant une interpolation trilinéaire :

$$Trans^f(\mathbf{P}) = \sum_{\substack{i' \in \{i-1,\ldots,i\} \\ j' \in \{j-1,\ldots,j\} \\ k' \in \{k-1,\ldots,k\}}} A_{i'} A_{j'} A_{k'} Trans(i', j', k')$$

où $A_{i'} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i' = i \\ (1-\lambda_i) & \text{sinon} \end{cases}$
(calcul similaire pour $A_{j'}$ et $A_{k'}$).

- Finalement, la couleur $\Phi_{\mathbf{P}}$ du point **P** est déterminée par l'équation suivante :

$$\Phi_{\mathbf{P}} = \Phi_{Ambiant} + Trans^f(\mathbf{P}) \times (\Phi_{Diffus} + \Phi_{Speculaire}(\mathbf{P})).$$

4 Extensions

4.1 Gestion des interactions mécaniques de la chevelure

À cause du nombre très important de cheveux qui composent une chevelure humaine, les collisions entre cheveux représentent une tâche difficile et coûteuse lors de l'animation de cheveux. En pratique, la prise en compte de ces collisions (en particulier leur détection), représente généralement environ 80% du temps total de simulation [PCP02].

Une approximation acceptable des interactions entre cheveux consiste à considérer que leur effet consiste principalement à donner du volume à la chevelure [LK01]. En partant de cette hypothèse, il se trouve que la connaissance de la densité de la chevelure en tout point de l'espace peut s'avérer très utile. En effet, si cette densité a localement une valeur au-delà d'un certain seuil (correspondant à la quantité maximale de cheveux pouvant être contenus dans une cellule 3D), les cheveux doivent subir des forces d'interaction les contraignant à s'éloigner les uns des autres, ce qui contribuera ainsi à conférer du volume à la chevelure. En pratique, on génère des forces répulsives à l'intérieur de chaque cellule présentant une densité supérieure au seuil toléré. À chaque segment de cheveu intersectant la cellule en question est appliquée une force de pénalité, orientée depuis le centre de la cellule vers le segment, et d'amplitude proportionnelle au carré de la distance entre le centre de la cellule et le segment.

Nous avons testé cette approche pour les inter-collisions, sur une chevelure animée par une approche de type cheveux guide [DMTKT93, CJY02]. Dans notre cas, une chevelure est composée d'environ une centaine de mèches, chaque mèche étant simulée par trois cheveux guide. Chaque cheveu guide est animé grâce au modèle rapide masses-contraintes présenté au chapitre précédent. La géométrie des cheveux non-simulés, nécessaires au rendu final de la chevelure, est simplement obtenue par interpolation des positions des cheveux guide, au sein de chaque mèche.

En se basant sur la carte de densité à chaque pas de temps, on calcule les collisions entre cheveux en appliquant des forces élastiques répulsives depuis le centre de chaque cellule dont la densité est trop forte. Bien que cette méthode soit extrêmement simple, elle donne de bons résultats visuels, en préservant notamment le volume globale de la chevelure au cours du mouvement. De plus il s'agit d'un moyen très efficace de gérer les interactions entre cheveux (le calcul représente seulement $2,5\%$ du temps total de la simulation).

4.2 Parallélisation de l'algorithme

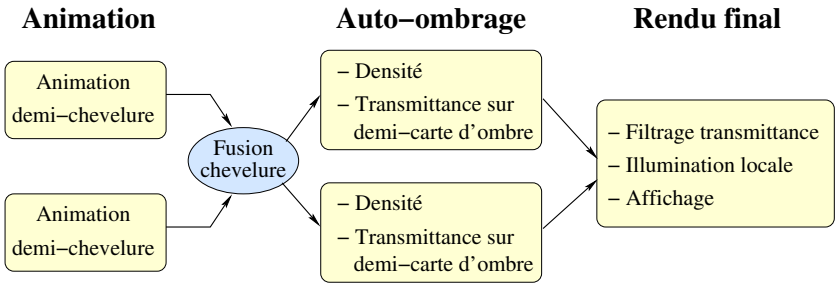


FIG. 4.7: *Une version parallélisée de notre algorithme d'auto-ombrage (exemple de deux processeurs se répartissant la charge de travail).*

Comme nous l'expliquons ci-dessous, notre approche peut être aisément parallélisée sur un réseau de machines, ce qui permet d'accroître encore ses performances. Nous présentons ici l'implémentation parallèle de tout le processus de simulation des cheveux, depuis l'animation jusqu'au rendu.

- Animation : grâce à l'utilisation de la carte de densité pour gérer les auto-collisions, chaque mèche de cheveux peut être simulée de manière indépendante. Cela permet une parallélisation directe de la méthode d'animation, dans laquelle un processeur donné s'occupe du calcul d'une partie de la chevelure, tous les résultats étant fusionnés à la fin de cette première tâche.
- Auto-ombrage : à nouveau, on peut effectuer directement une parallélisation des algorithmes mis en place, grâce au fait que la carte d'ombre est orientée selon la direction de la lumière. Contrairement à l'étape précédente, les sous-tâches indépendantes ne s'effectuent pas sur chaque mèche de la chevelure, mais sur chaque colonne (j,k) de la carte d'ombre. En effet, comme nous l'avons vu en Section 3.2, la carte d'ombre étant orientée selon la direction de la lumière, le calcul de la transmittance peut se faire sur chaque colonne, de manière totalement indépendante des colonnes voisines.

Nous avons testé cette implémentation sur un réseau de PCs standards et nous avons été capables, en utilisant 3 CPUs (deux se répartissant la charge du travail effectif, et le troisième servant à coordonner la parallélisation et à fusionner les résultats obtenus), de doubler les performances de l'application de base (utilisant un seul processeur, et dont les résultats sont donnés dans la section suivante).

Lorsque nous avons essayé d'utiliser plus de CPUs, le rassemblement des données sur le réseau et l'envoi de la géométrie au GPU sont apparus comme le principal goulot d'étranglement de la méthode. L'envoi de tableaux de points (OpenGL "vertex arrays") au lieu de points devrait aider à lever en partie cette limitation.

5 Résultats et discussion

Nous avons appliqué notre algorithme à des chevelures statiques et dynamiques. Dans chacun de ces cas, nous comparons notre approche avec les méthodes précédentes, en termes de qualité et de performances. Les résultats et vidéos illustrant la méthode sont disponibles sur notre site web, à l'adresse http ://www-evasion.imag.fr/Publications/2005/BMC05a/.

5.1 Rendu de chevelures statiques

Les Figures 4.1 et 4.8 montrent que notre algorithme d'auto-ombrage produit de bons résultats visuels, aussi bien pour des coiffures générées de manière purement synthétique, que pour des coiffures capturées à partir de vraies chevelures. Nous pouvons remarquer sur la Figure 4.8 que grâce aux ombres portées dans la chevelure (à droite), les mèches de cheveux se détachent clairement et donnent du relief à la chevelure. Au contraire, sans ombrage (à gauche), la chevelure a une apparence plate et sans volume.

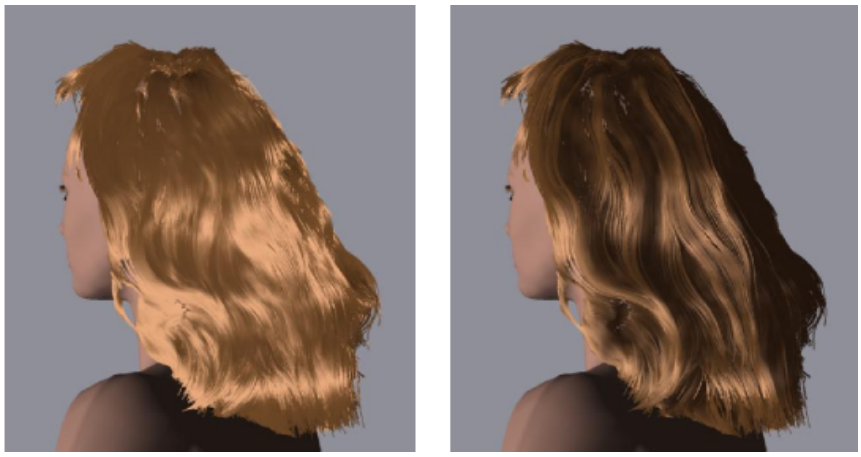


FIG. 4.8: *Notre algorithme d'auto-ombrage appliqué à une chevelure capturée à partir de photographies par la méthode de Paris et al. [PBS04]. La chevelure est composée de* 87 500 *cheveux (*11 23 K *segments) et son rendu a été effectué en 2 secondes.*

La Figure 4.9 montre des résultats obtenus sur une chevelure bouclée, en utilisant différentes résolutions pour la carte d'ombre. On remarque que pour des résolutions fines (128^3 ou 256^3), les mèches bouclées sont correctement ombrées, et que la forme des boucles est clairement visible, ce qui n'est pas le cas pour les résolutions plus grossières. En pratique, nous avons estimé que la résolution 128^3 était suffisante pour rendre les détails de la chevelure de manière satisfaisante.

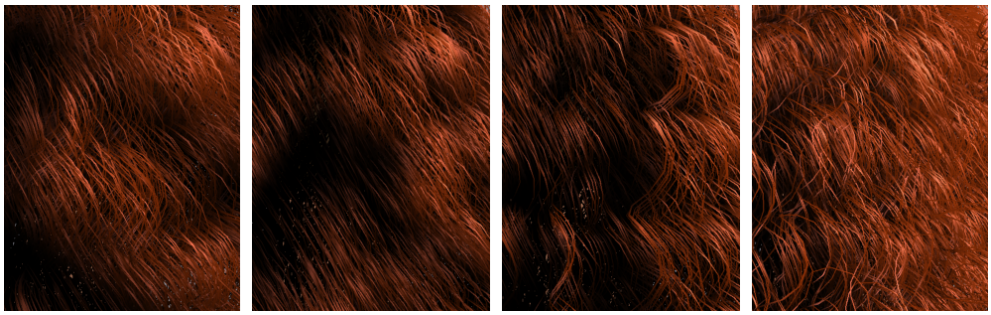


FIG. 4.9: *Évaluation de la qualité de l'auto-ombrage, en utilisant différentes résolutions de la carte d'ombre. De gauche à droite :* 32^3 *avec* $\Delta s = 0,5$ *;* 64^3 *avec* $\Delta s = 0,2$ *;* 128^3 *avec* $\Delta s = 0,1$ *et* 256^3 *avec* $\Delta s = 0,05$.

Modèle de cheveux rendu (nombre de segments)	Initialisation carte + calcul densité	Calcul transmittance	Filtrage + affichage	Total rendu
Lisse (100 K)	0,038	0,015	0,037	0,09
Bouclée (200 K)	0,062	0,015	0,053	0,13

TAB. 4.1: *Performance détaillée du processus de rendu (calcul de la densité, de la transmittance, du filtrage, et du rendu final) d'une chevelure lisse composée de* 100 K *segments et d'une chevelure bouclée composée de* 200 K *segments. Les résultats sont exprimés en secondes par image ; les calculs ont été effectués sur un CPU Intel P4 à une fréquence de 3 GHz.*

En comparaison avec [MKBR04], basé sur les fonctionnalités avancées du GPU, notre algorithme d'auto-ombrage est plus rapide (11 images par seconde au lieu de 6 images par seconde pour 100 K segments de cheveux).

5.2 Rendu de chevelures dynamiques

La Figure 4.10 montre deux images tirées de nos animations de cheveux. Notre algorithme d'auto-ombrage capture les discontinuités fines que l'on peut observer dans une chevelure réelle en mouvement, comme illustré sur la Figure 4.11.



FIG. 4.10: *Une chevelure brune, lisse (*100 K *segments) et une chevelure rousse, bouclée (*200 K *segments) animées sur différents mouvements de danse, et rendues interactivement par notre algorithme.*

Le tableau 4.2 donne les performances détaillées de la simulation totale, comprenant, l'animation, la gestion des collisions entre cheveux, et le rendu, pour des chevelure lisses et bouclées. Noter que le temps consacré à l'animation n'est pas le même pour les deux chevelures, car ce temps inclut les mises à jour et l'interpolation des cheveux avant le rendu.

Modèle de cheveux simulé (nombre de segments)	Animation	Auto-collisions cheveux	Rendu	Total simulation
Lisse (100 K)	0,067	0,003	0,09	0,16
Bouclée (200 K)	0,254	0,003	0,13	0,557

TAB. 4.2: *Performances détaillée de la simulation (animation, rendu et collisions entre cheveux) obtenues pour deux types de chevelures composées chacune de 134 mèches animées : une chevelure lisse (*100 K *segments rendus) et une chevelure bouclée (*200 K *segments rendus). Les résultats sont exprimés en secondes par image ; les calculs ont été effectués sur un CPU Intel P4 à une fréquence de 3 GHz.*

Avec notre méthode, une chevelure composée de 3350 cheveux et de 100 K segments est donc entièrement simulée à une fréquence de 6 images par seconde. Pour des raisons esthétiques, nous avons implémenté les collisions entre la chevelure et le corps, en utilisant une méthode de pénalité similaire à celle utilisée dans le chapitre précédent. La prise en compte de ces collisions fait tomber les performances à $3,5$ images par seconde pour la chevelure lisse, et $1,5$ images par seconde pour la chevelure bouclée. Précisons que notre but ici n'était pas d'optimiser cette partie du problème.



FIG. 4.11: *Une vraie chevelure ombrée (à gauche) et notre modèle (à droite) sous des conditions d'éclairage similaires.*

Dans notre approche, le volume de la chevelure est généré convenablement un utilisant un champ de forces basé sur les densités locales de cheveux, comme expliqué en Section 4.1. Cependant, cette méthode ne tient pas compte de l'anisotropie des cheveux ni de l'interpénétration des mèches entre elles. Ceci pourrait être considéré en ajoutant des informations supplémentaires dans la carte d'ombre comme l'orientation locale moyenne des cheveux.

6 Bilan

Nous avons présenté une nouvelle méthode d'auto-ombrage, basée sur une carte de densité orientée selon la direction de la lumière. Notre approche permet de rendre interactivement différents types de chevelures composées de milliers de cheveux, et produit des résultats visuellement convaincants. Notre algorithme peut facilement être parallélisé pour améliorer les performances. De plus, nous avons montré que la carte de densité pouvait servir non seulement à gérer de manière efficace les interactions lumineuses entre cheveux, mais également les interactions mécaniques telles que les collisions, en réduisant notablement le coût de la détection. Une piste pour des travaux futurs serait d'utiliser l'information de densité afin d'optimiser également la détection des collisions entre les cheveux et le corps.

Pour des raisons de simplicité, notre approche est basée sur l'hypothèse d'une source lumineuse unique et infiniment lointaine, ce qui pourrait être une limitation si l'on souhaite traiter par exemple des scènes d'intérieur, éclairées par plusieurs sources ponctuelles. Cependant, il semble que nous pourrions facilement traiter le cas d'une source ponctuelle en changeant simplement notre fonction de correspondance $\mathbf{\Psi}$. Au lieu de considérer une partition cubique uniforme, la nouvelle fonction de correspondance $\mathbf{\Psi}'$ devrait tenir compte d'une partition spatiale angulaire issue de la source de lumière, et échantillonnée dans la direction des rayons lumineux. Notre méthode pourrait également prendre en compte plusieurs sources de lumière en multipliant simplement le nombre de cartes d'ombre considérées. La transmittance finale d'un point $\mathbf{P}$ serait alors calculée par interpolation entre les différentes valeurs de transmittance obtenues depuis les différentes sources.

Pour obtenir une meilleure précision du rendu sans trop augmenter le coût des calculs, une idée intéressante serait de suivre l'approche de Mertens *et al.* [MKBR04]. Cette méthode utilise un échantillonnage adaptatif le long des rayons lumineux, en fonction du nombre et de la répartition des objets à éclairer, et fournit ainsi une meilleure approximation de la fonction de visibilité par rapport aux approches qui se basent sur un échantillonnage uniforme.

Tous les résultats de chevelures présentés dans la suite de ce mémoire ont été rendus grâce à la méthode d'auto-ombrage développée dans ce chapitre, combinée cette fois avec l'algorithme d'illumination locale de Marschner *et al.*[2] [MJC+03] (voir Figure 4.12). Nous avons également pris en compte dans ce nouveau modèle la translucidité des fibres capillaires au moment du rendu OpenGL, en triant la géométrie de la chevelure selon la distance à la caméra, puis en l'affichant dans ce même ordre, accumulant ainsi les valeurs d'*alpha* d'OpenGL (voir [Kim02] pour plus de détails sur cet algorithme). Cette nouvelle méthode, plus réaliste que la précédente, ne permet bien sûr plus de générer des résultats en temps interactif ; néanmoins, une dizaine de secondes seulement est nécessaire en moyenne pour produire le rendu de chevelures complètes telles que celles qui sont présentées sur la Figure 4.12. Dans la suite de nos travaux, nous avons ainsi pu disposer de deux niveaux de rendu distincts : le premier (tel que décrit dans ce chapitre), très rapide, nous a servi à pré-visualiser nos résultats en cours de modélisation ou de réglage de paramètres ; le second, plus réaliste, nous a été utile pour rendre nos coiffures et nos animations finales.



FIG. 4.12: *Résultats de rendus de chevelures, obtenus en combinant notre algorithme d'auto-ombrage avec le modèle d'illumination de Steve Marschner [MJC+03], et en prenant également en compte la translucidité des fibres pour le tracer des cheveux individuels : a) rendu que nous avons généré à partir d'une géométrie de chevelure capturée par la méthode de Wei et al. [WOQS05] ; b) rendu d'une chevelure générée par notre méthode de simulation statique présentée au Chapitre 6 ; c) d) et e) rendus de chevelures générées par notre méthode de simulation dynamique présentée au Chapitre 7.*

[2]Je tiens à remercier chaleureusement Steve Marschner pour avoir bien voulu me laisser utiliser son code d'illumination locale de cheveux. Merci également à Sylvain Paris pour son aide dans la prise en main du logiciel de Steve Marschner.

Troisième partie

Simulation réaliste de chevelures

Introduction

Toutes les méthodes de simulation de chevelures présentées au sein de la communauté d'informatique graphique jusqu'à présent se sont finalement limitées à l'utilisation de modèles physiques assez approximatifs pour la chevelure. En particulier, aucune des méthodes précédentes n'est capable de prendre en compte, de manière réaliste, certains comportements typiques des cheveux réels tels que la formation de boucles, la dynamique de cheveux bouclés, le rôle de l'encastrement et de la section elliptique du cheveu dans la détermination de la forme de la chevelure, l'effet de l'eau sur les cheveux, etc.

Certes, des modèles pseudo-physiques, dont le but est principalement de créer l'illusion du réel, suffisent parfois pour des applications purement visuelles destinées à l'industrie du loisir, et peuvent même s'avérer nécessaires lorsque d'autres contraintes (temps-réel pour le jeu vidéo, contrôlabilité du logiciel par l'infographiste, etc.) s'ajoutent à celle de la plausibilité physique d'une animation. Cependant, de telles approches ne seraient pas satisfaisantes dans le cadre d'une application où l'on souhaite utiliser un simulateur réaliste, fiable, et présentant des aspects prédictifs, comme cela pourrait typiquement être le cas en cosmétologie.

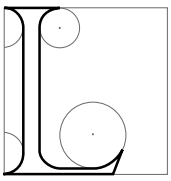
Contrairement à d'autres domaines étudiés depuis plus d'un siècle en physique - comme la dynamique des fluides par exemple, pour laquelle les équations de Navier-Stokes font office de modèle de référence - il n'existe actuellement pas de modèle mécanique validé ni reconnu pour animer des cheveux. Proposer un simulateur physique réaliste de cheveux constitue donc un projet très ambitieux, qui, en plus de compétences en informatique graphique, nécessite une bonne compréhension des propriétés mécaniques des cheveux ainsi qu'une solide maîtrise des méthodes de modélisation en mécanique ; et bien évidemment, tout le travail que nous avons effectué dans le cadre de ce projet n'aurait pas pu être entrepris sans la collaboration que nous avons menée avec les chercheurs de L'Oréal, physiciens spécialistes du cheveu, et Basile Audoly, chercheur en modélisation mécanique. Grâce à ce partenariat fortement pluridisciplinaire, il est apparu qu'il était possible d'aller beaucoup plus loin dans la modélisation mécanique réaliste des cheveux que tout ce qui avait déjà été fait en informatique graphique auparavant.

CHAPITRE 5

Tige de Kirchhoff et modèle de Super-Hélice

Le livre de la Nature est écrit dans le langage des Mathématiques et ses lettres sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques.

GALILÉE



ES équations de Kirchhoff décrivent les déformations des tiges élastiques et inextensibles. Ces équations, bien que formulées dans le cadre de l'élasticité linéaire Hookéenne, sont non-linéaires et permettent de décrire des changements importants de formes à partir de la configuration de repos d'une tige. Reposant sur des bases mécaniques bien établies, les équations de Kirchhoff tiennent naturellement compte de tous les modes de déformations observés, dans nos conditions d'étude, sur les cheveux réels (courbure et torsion significatives, élongation négligeable). De plus, tous les paramètres intervenant dans ces équations sont reliés à des propriétés simples du cheveu telles que sa frisure ou l'ellipticité de sa section. Pour toutes ces raisons, les équations de Kirchhoff apparaissent comme un modèle beaucoup plus puissant et pertinent que les modèles précédents pour simuler des cheveux de manière réaliste.

Ce chapitre a pour premier objectif de présenter de manière synthétique le modèle de tige de Kirchhoff, dans le cas dynamique (le plus général). Nous montrons d'abord que ce modèle, bien que très peu exploité jusqu'alors en informatique graphique, présente un certain nombre d'avantages par rapport aux modèles utilisés précédemment pour simuler des cheveux ou des fils. Ensuite, nous décrivons précisément les équations des tiges de Kirchhoff, en nous appuyant sur deux ouvrages récents en mécanique : d'une part, la thèse de Nadia Chouaïeb [Cho03], qui expose brièvement en introduction la théorie générale de Cosserat sur les tiges ; d'autre part un ouvrage en cours de Basile Audoly et Yves Pomeau [AP07], qui se place dans le cadre plus restreint des hypothèses de Kirchhoff.

Une fois ce cadre théorique fixé, nous proposons une discrétisation spatiale du modèle de tige de Kirchhoff, le modèle de *Super-Hélice*. Ce nouveau modèle discret nous sera très utile dans la suite pour simuler des cheveux, à la fois en statique et en dynamique.

1 Modèles précédents de fils

Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, trois familles de modèles physiques ont été proposées précédemment pour simuler la dynamique de cheveux individuels : les systèmes masses-ressorts [RCT91, PCP01, WL03], la dynamique projetée à deux dimensions angulaires [AUK92, DMTKT93, LK01], et les chaînes articulées d'objets rigides [HMT01, CJY02]. En réalité, seul le dernier modèle permet de tenir compte des déformations en courbure et en torsion de la tige. Il a également l'avantage d'incorporer de manière intrinsèque la condition d'inextensibilité du cheveu. Cependant, chaque morceau élémentaire d'une chaîne articulée étant rigide (donc non déformable), il est nécessaire d'échantillonner suffisamment le cheveu pour pouvoir prendre en compte des déformations importantes en courbure ou en torsion. Il semble donc que ce modèle ne soit pas très bien adapté à la simulation de cheveux naturellement bouclés. D'autre part, comme le souligne Hadap dans sa thèse [Had03], la formulation classique des équations par les coordonnées généralisées du système rend très difficile l'utilisation d'un schéma implicite pour l'intégration en temps. Il en résulte d'importantes sources d'instabilité au cours de l'animation, en particulier lorsque la tige est en contact avec des objets extérieurs.

Outre les modèles de cheveu individuel, développés spécifiquement pour la simulation de cheveux, des modèles linéiques ont été proposés en informatique graphique pour simuler des objets de type fil/corde. Même si les objectifs dans les deux cas peuvent être très différents (un modèle de cheveu unique est généralement conçu en vue d'être ensuite étendu à une collection de cheveux, tandis que les travaux portant sur la simulation d'un fil ou d'une corde se focalisent plutôt sur le contrôle et la manipulation interactive d'un tel objet), il est intéressant d'étudier les différents modèles physiques qui ont été mis au point pour simuler un fil déformable.

1.1 Modèle paramétrique modal

Dans le contexte de l'animation par positions clefs, Barzel [Bar97] a conçu un modèle paramétrique de tige très simplifié, permettant à un animateur de définir et de contrôler facilement les déformations d'une tige à chaque pas de temps. Ce modèle s'inspire des approches de dynamique modale présentées au Chapitre 2 : il repose sur une formulation paramétrique prenant en compte quelques modes élémentaires de déformation d'une corde vibrante. Trois éléments sont combinés pour former l'ensemble de toutes les déformations possibles pour la tige : une forme de repos, donnée de manière analytique (en fonction de la longueur de la tige par exemple), une fonction de déformation globale (typiquement, un balancement de la tige paramétré par une amplitude), et une fonction de propagation d'onde (paramétrée par une amplitude, une fréquence, une phase, etc.). Deux modèles différents sont proposés, qui répondent chacun à des conditions aux bords bien précises pour la tige : tige suspendue par les deux extrémités, et tige suspendue par une seule extrémité, l'autre extrémité étant libre. Une extension du premier modèle permet également de gérer les déformations d'une corde enroulée en spirale (cordon de téléphone par exemple). Cette approche a été largement utilisée pour l'animation de cordes raides, de câbles enroulés et de ressorts dans le film d'animation "Toy Story".

Le but de l'approche précédente n'est pas de gérer la dynamique exacte d'une tige physique, mais plutôt d'aider l'animateur à la création manuelle d'animations plausibles de cordes, en lui fournissant un certain nombre d'outils de déformation. Ce n'est pas du tout l'objectif que nous nous sommes fixé dans le cadre de cette partie de la thèse, puisque nous souhaitons développer un simulateur physi-

quement réaliste de cheveux. D'autre part, même dans un contexte de production de films 3D où le contrôle manuel des animateurs sur le mouvement est primordial, la technique d'animation par positions clefs ne semble pas du tout adaptée au cas précis de l'animation d'une chevelure, puisqu'il paraît impensable de spécifier à la main les déformations subies à chaque pas de temps par chaque cheveu ou chaque groupe de cheveux. On attend clairement une automatisation plus conséquente au niveau de la dynamique de cheveux individuels, et un contrôle à plus grande échelle (celle de la chevelure complète).

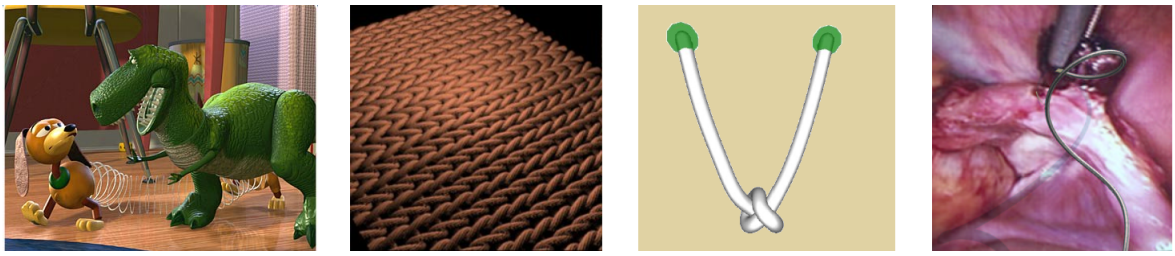


FIG. 5.1: *Modèles précédents de fils en graphique. De gauche à droite : 1) modèle paramétrique pour le contrôle par positions clefs, qui a servi à animer le ressort composant le corps du chien de Toy Story [Bar97] ; 2) simulation de mailles tricotées par le modèle Lagrangien de spline [Nou99] ; 3) animation du modèle Lagrangien de spline avec prise en compte de l'élasticité en flexion et gestion des auto-contacts par pénalités [Len04] ; 4) modélisation d'un fil chirurgical par une tige de Cosserat statique [Pai02].*

1.2 Modèle Lagrangien de spline matérielle 3D

De nombreux travaux, menés par Rémion et son équipe de recherche à Reims, ont porté sur la mise au point d'un modèle dynamique de fil pour la simulation réaliste de mailles tricotées [Nou99,Noc01]. Dans ce contexte, un fil est représenté par une spline 3D, et considéré comme un système mécanique Lagrangien continu, dont les coordonnées généralisées sont les points de contrôle 3D de la spline. Les équations de Lagrange sont alors utilisées pour animer ce système, et les nombreuses contraintes existant entre les mailles d'un tricot sont naturellement gérées par des multiplicateurs de Lagrange. Si les contraintes externes au système sont relativement faciles à ajouter, du fait que les paramètres indépendants du système sont des coordonnées 3D, les contraintes internes (élasticité en élongation, en flexion et en torsion) du fil matériel - supposé ici légèrement extensible - ne sont pas prises en compte dans cette modélisation. En effet, les degrés de liberté choisis pour le système ne sont *pas* des vrais degrés de liberté *mécaniques* (comme on l'attendrait pour un modèle lagrangien), mais des degrés de liberté *géométriques*. Dans les premiers travaux portant sur ce modèle, la contrainte interne élastique d'élongation du fil est d'abord simplement ajoutée grâce à des ressorts placés en chaîne, entre les différents points de contrôle de la spline [Nou99], avant d'être par la suite introduite *via* une énergie interne continue d'élongation élastique [Noc01], dont la contribution est insérée dans les équations de Lagrange.

Lenoir [Len04] a récemment repris ce modèle de spline déformable et l'a adapté à la simulation dynamique de fil chirurgical pour le temps réel. Dans ses travaux, il propose notamment d'étendre le modèle en prenant désormais en compte l'élasticité en flexion du fil, à travers la formulation d'une énergie continue de flexion. Cependant, la torsion n'est pas considérée pour le moment. Ce modèle est surtout conçu pour répondre de manière visuellement convaincante aux contraintes imposées par l'utilisateur ou par l'environnement. Notamment, l'ajout de contraintes dites "glissantes", mises en œuvre à l'aide de multiplicateurs de Lagrange, permet de forcer la spline à passer par certains points 3D de l'espace. Les auto-contacts du fil sont quant-à-eux pris en compte par une méthode classique de pénalité.

S'il convient bien à la manipulation interactive et à la gestion de contraintes multiples (comme cela peut être dans le cas d'un tissage de mailles), le modèle de spline dynamique n'est cependant pas approprié pour représenter correctement le système qui nous intéresse, à savoir une tige matérielle *inextensible*. En effet, la contrainte forte d'inextensibilité n'est pas incorporée dans le modèle, et de manière générale, les degrés de liberté utilisés sont beaucoup trop permissifs pour le système mécanique du cheveu que nous cherchons à modéliser. Nous souhaitons modéliser un cheveu en utilisant un modèle mécanique *minimal*, incorporant toutes les contraintes internes d'inextensibilité et d'élasticité en courbure et torsion. Ce modèle existe bel et bien, et il a été étudié depuis près d'un siècle en mécanique : c'est le modèle de tige de Kirchhoff, issu des théories d'Euler, de Cosserat et de Kirchhoff sur les tiges matérielles.

1.3 Modèle de Cosserat

Dans leur théorie exhaustive sur les corps déformables, développée au début du XX^{e}siècle, les frères Cosserat ont notamment proposé une description mathématique des tiges à partir de courbes géométriques en 3D et de repères adaptés à ces courbes [CC09]. Pai [Pai02] a été le premier chercheur à présenter le modèle des tiges de Cosserat à la communauté d'informatique graphique, et à montrer son utilité pour la simulation quasi-statique d'un fil chirurgical. Dans cette approche, Pai se place dans le cas d'une tige inextensible, non soumise au cisaillement, et dont la loi de comportement est linéaire ; autrement dit, sous les hypothèses de Kirchhoff. Puis, il propose de résoudre les équations de Kirchhoff statiques de manière itérative, en remarquant une analogie entre la cinématique spatiale des tiges de Kirchhoff et la dynamique des chaînes articulées. Nous commenterons plus en détail cette approche au Chapitre 6, en la comparant notamment à notre propre modèle de simulation statique de tige de Kirchhoff, basée sur une minimisation d'énergie potentielle.

Nous présentons dans la section suivante le modèle général de tige de Cosserat, avant de le restreindre aux hypothèses de Kirchhoff. Bien que sous ces hypothèses, la loi de comportement du matériau constituant la tige soit supposée linéaire, il est important de remarquer que les équations de Kirchhoff décrivant l'équilibre ou la dynamique d'une tige élastique sont *non-linéaires*, et donc qu'elles rendent compte des effets non-linéaires caractéristiques de la forme à l'équilibre ou du comportement dynamique des cheveux. Enfin, précisons que la condition d'encastrement à une extrémité de la tige (correspondant à l'encastrement du cheveu dans le cuir chevelu), et la condition de bord libre à l'autre extrémité imposent des conditions aux limites dont il faudra tenir compte dans la résolution des équations.

2 Tige de Cosserat

Le modèle de tige de Cosserat permet de représenter mathématiquement une tige matérielle, c'est-à-dire un objet longiligne, dont les dimensions selon les deux directions définissant le plan de la section transverse sont négligeables par rapport à la troisième dimension, longitudinale. Le cheveu est donc un exemple de tige matérielle qui, à l'échelle macroscopique, est très bien décrit par le modèle de Cosserat. Nous présentons tout d'abord le modèle général de tige de Cosserat, avant de le restreindre aux hypothèses d'inextensibilité et de non-cisaillement (hypothèses de Kirchhoff).

2.1 Définition générale

Repère matériel

Dans le modèle de tige de Cosserat, la configuration d'une tige est donnée par deux éléments :

– Une courbe paramétrée de l'espace $\{\mathbf{r}(s), s \in [0,L]\}$, appelée *courbe moyenne*, décrivant la géométrie du squelette de la tige. On supposera dans la suite que $\mathbf{r}(s)$ est au moins de classe $\mathcal{C}^2$.
– Une base orthonormale $(\mathbf{u}_1(s), \mathbf{u}_2(s), \mathbf{u}_3(s))$ attachée en chaque point de la courbe moyenne. Les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ servent à orienter la section de la tige en s, et sont en général choisis comme les axes principaux de la section. Le troisième vecteur $\mathbf{u}_3$ s'obtient par la relation : $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$.

Définition 5.1 *Le repère* $\mathcal{F}(s) = \{\mathbf{r}(s); (\mathbf{u}_1(s), \mathbf{u}_2(s), \mathbf{u}_3(s))\}$*, attaché à la section physique de la tige en s, sera appelé* repère matériel *de la tige en s.*

Cinématique

Dans le modèle de Cosserat, l'évolution spatiale de la tige est déterminée par deux vecteurs de déformation, notés $\mathbf{w}(s)$ et $\mathbf{\Omega}(s)$, et tels que :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s) = \mathbf{w}(s) \tag{5.1a}$$

$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial s}(s) = \mathbf{\Omega}(s) \wedge \mathbf{u}_i(s) \tag{5.1b}$$

où $\mathbf{\Omega}(s)$ est appelé *vecteur de Darboux*.

Notons que les composantes w_i du vecteur $\mathbf{w}$ dans le repère matériel $\mathcal{F}$ caractérisent la déformation de la tige par rapport à sa courbe moyenne $\mathbf{r}(s)$. Ainsi, les deux premières composantes $w_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1$ et $w_2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2$ quantifient le cisaillement transverse de la tige, tandis que la troisième composante $w_3 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_3$ quantifie l'étirement ou la compression axiale de la tige.

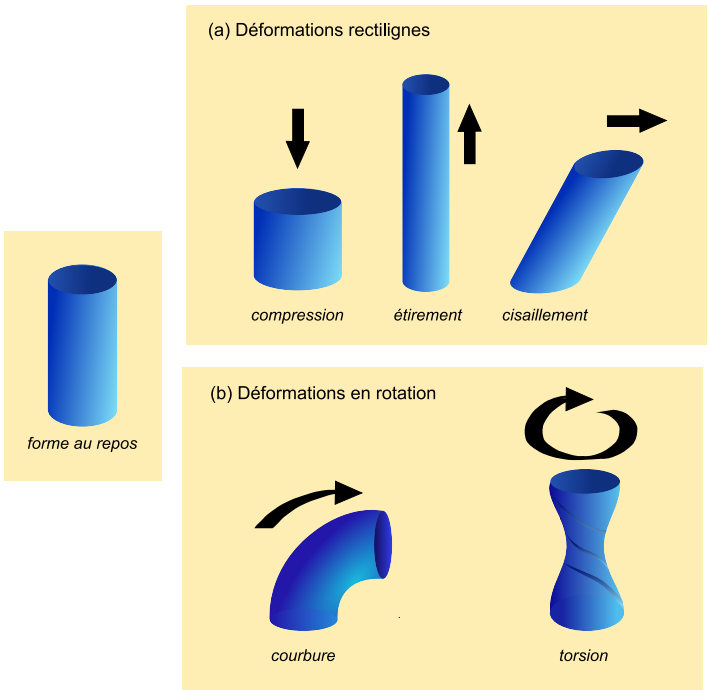


FIG. 5.2: *Déformations élémentaires sur un morceau de tige de Cosserat rectiligne.*

Quant aux composantes Ω_i du vecteur $\mathbf{\Omega}(s)$ sur le repère matériel $\mathcal{F}$, elles quantifient les déformations de la tige par rapport à chacun des axes de $\mathcal{F}$. Ainsi, les deux premières composantes

$\Omega_1 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_1$ et $\Omega_2 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_2$ définissent une déformation en *courbure* (rotation locale autour de $\mathbf{u}_1$ et de $\mathbf{u}_2$ respectivement) et la troisième composante $\Omega_3 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_3$ une déformation en *torsion* (rotation locale autour de $\mathbf{u}_3$).

La Figure 5.2 illustre tous ces types de déformation.

Définition 5.2 *On appellera* courbure matérielle *chacune des composantes $\Omega_1(s)$ et $\Omega_2(s)$, caractérisant respectivement la rotation locale en s de la courbe autour des axes $\mathbf{u}_1(s)$ et $\mathbf{u}_2(s)$ de la section de la tige, et on appellera* torsion matérielle *la troisième composante $\Omega_3(s)$ caractérisant la rotation locale de la courbe en s autour du troisième axe $\mathbf{u}_3(s)$, normal au plan de la section de la tige.*

2.2 Hypothèses de tige inextensible et sans cisaillement

Comme mentionné précédemment, nous cherchons à modéliser un cheveu comme une tige inextensible et non soumise au cisaillement, et donc à nous placer dans le cadre plus restreint de la théorie de Kirchhoff.

Définition 5.3 *Une tige de Cosserat est dite* inextensible *si :*

$$\forall s \quad \| \frac{\partial \mathbf{r}(s)}{\partial s} \| = 1. \tag{5.2}$$

Cette condition impose donc au vecteur $\mathbf{w}$, vecteur dérivée de la courbe, d'être unitaire. Nous appellerons par la suite ce vecteur unitaire vecteur *tangent* à la courbe en s, et nous le noterons $\mathbf{t}(s)$.

Une autre conséquence de l'équation (5.2) est que la paramétrisation s de la courbe est désormais l'*abscisse curviligne* du point $\mathbf{r}(s)$.

Définition 5.4 *Une tige de Cosserat est dite* sans cisaillement *si :*

$$\forall s \quad v_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \qquad v_2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \tag{5.3}$$

$$i.e. \qquad \frac{\partial \mathbf{r}(s)}{\partial s} = \mathbf{u}_3. \tag{5.4}$$

En utilisant les définitions 5.3 et 5.4, on obtient $\mathbf{u}_3 = \mathbf{t}$. Ainsi le dernier vecteur du repère matériel $\mathcal{F}(s)$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe en s. En conséquence, le plan de la section en s d'une tige de Cosserat inextensible et sans cisaillement est toujours orienté *normalement* à la tangente à la courbe moyenne en s (on parlera de section *droite* de la tige).

2.3 Section elliptique de la tige

Nous avons vu au Chapitre 1 que la section d'un cheveu est à peu près constante le long de la tige, et qu'elle peut avoir, selon le groupe ethnique d'appartenance, une forme circulaire ou ovale. Nous supposons donc ici que notre modèle de tige garde une section constante le long de son axe, et nous représentons la forme de sa section par une ellipse, paramétrée par un paramètre appelé *ellipticité*. Ce paramètre, défini ci-dessous, permet de passer continûment d'une tige à section ronde à une tige à section très ovale, et donc de représenter toute la variété des groupes ethniques existants. Nous verrons dans les équations mécaniques que l'ellipticité a un effet non négligeable sur la forme globale du cheveu.

Comme nous l'avons mentionné précédemment au Chapitre 1, le terme *ellipticité*, largement utilisé par les cosmétologues et par certains chercheurs académiques [MJC+03] est ambigu : il désigne généralement le rapport des rayons, pour certains le rapport du plus petit rayon sur le plus grand (ellipticité comprise entre 1 et $+\infty$, de plus en plus grande à mesure que le cheveu devient elliptique), pour d'autres l'inverse (ellipticité comprise entre 0 et 1, de plus en plus petite à mesure que le cheveu devient elliptique). Pour éviter toute ambiguïté, nous choisirons ici d'exprimer la forme elliptique du cheveu à l'aide de la quantité mathématique *excentricité*, notée e, définie pour les ellipses comme le rapport de la distance du centre au foyer et la longueur du demi-grand axe. Une formulation équivalente, que nous utiliserons dans les calculs, est la suivante :

$$e = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2}} \tag{5.5}$$

où a_1 est par convention la longueur du demi-grand axe (grand rayon) et a_2 la longueur du demi-petit axe (petit rayon) de l'ellipse (voir Figure 5.3, à droite). L'excentricité vaut ainsi 0 pour un cercle, et croît à mesure que l'ellipse s'aplatit.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cas d'une tige de Cosserat *inextensible et sans cisaillement*. Nous désignerons ce modèle sous le nom de *tige de Kirchhoff*. Nous supposerons de plus que ce modèle présente une *section elliptique, constante le long de la tige*.

2.4 Repère matériel *vs.* repère de Frenet

Le repère matériel $\mathcal{F}(s)$ est désormais défini par l'origine $\mathbf{r}(s)$ et par la base orthonormale ($\mathbf{n}_1(s)$, $\mathbf{n}_2(s)$, $\mathbf{t}(s)$), telle que :

- $\mathbf{n}_1$ est dans le plan de la section droite en s, et orienté par convention suivant la première direction principale de la section elliptique (grand axe).
- $\mathbf{n}_2$ est dans le plan de la section droite en s, et orienté suivant la seconde direction principale de la section elliptique (petit axe).
- $\mathbf{t}$ est le vecteur tangent à la courbe en s.

On notera alors respectivement $\kappa_1(s) = \Omega_1(s)$, $\kappa_2(s) = \Omega_2(s)$ et $\tau(s) = \Omega_3(s)$ les deux courbures et la torsion matérielles de la tige en s, qui caractérisent respectivement la rotation locale de la tige autour des axes $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{t}$. Remarquons que désormais, la torsion matérielle quantifie l'enroulement de la tige autour d'elle-même, puisque le dernier vecteur de la base matérielle est confondu avec l'axe tangent à la courbe. Les courbures, torsion et repère matériel d'une tige de Kirchhoff sont illustrés sur la Figure 5.3.

Attention, le repère matériel $\mathcal{F}$ ne doit pas être confondu avec le repère de Frenet, qui, en mathématiques, est le repère local classique pour les courbes gauches. Des rappels sur le trièdre de Frenet, et sur la courbure et la torsion géométriques d'une courbe gauche sont donnés en Annexe A.

Le repère matériel et le repère de Frenet sont fondamentalement différents. En effet, le repère matériel est lié en chaque point à la section droite de la tige physique (on peut considérer les axes principaux comme s'ils étaient "peints" sur la section), alors que le repère de Frenet est lié à la géométrie d'une courbe purement mathématique et non physique, sans épaisseur. Contrairement au repère de Frenet, $\mathcal{F}(s)$ est toujours bien défini, et évolue de manière continue le long de la tige par une succession de rotations infinitésimales (rotation en courbures ou en torsion).

Ajoutons que les courbures et torsion matérielles de la tige ne jouent pas le même rôle que la courbure et la torsion géométriques définies pour une courbe gauche. Une différence fondamentale

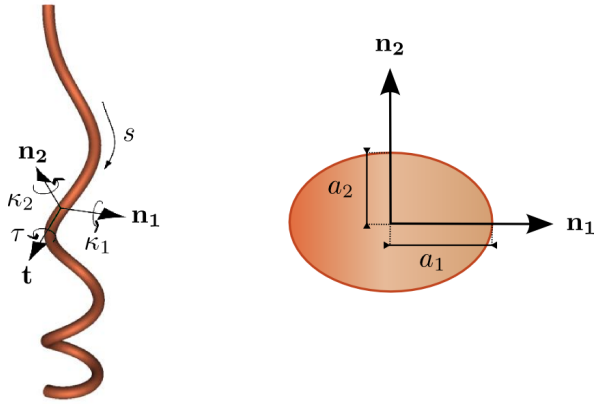


FIG. 5.3: *À gauche : tige de Kirchhoff, avec l'un de ses repères matériels attaché à une section de la tige ; la courbure* κ_1 *(resp.* κ_2*) indique de combien tourne localement la tige autour de* $\mathbf{n}_1$ *(resp.* $\mathbf{n}_2$*), et la torsion* τ *indique de combien tourne localement la tige autour de l'axe tangent* $\mathbf{t}$*. À droite : une section transversale (grossie) de la tige, caractérisée par une forme elliptique.*

peut se remarquer en regardant ce que signifie la torsion dans chacun des deux cas :

- La torsion géométrique d'une courbe mathématique (*torsion* en anglais) est non nulle si et seulement si la courbe sort du plan (courbe gauche). Par exemple, une ligne droite a une torsion nulle (car elle est contenue dans un plan), et une hélice présente une torsion non nulle constante en tout point de la courbe.
- Pour une tige physique, la torsion matérielle (*twist* en anglais) est non nulle en un point de la tige lorsqu'il y a rotation de la tige autour de l'axe de la tangente en ce point. C'est le matériau de la tige qui se déforme par vrillage, tandis que sa courbe moyenne peut très bien rester inchangée. Par exemple, une tige ayant une courbe moyenne en ligne droite peut présenter une torsion matérielle non nulle, dans le cas où elle s'enroule uniquement autour de son axe (voir Figure 5.4, c)). Réciproquement, une tige sans torsion matérielle peut très bien avoir une courbe moyenne qui sort du plan, si les deux fonctions courbures sont non nulles et non constantes le long de la tige (voir Figure 5.4, b)).

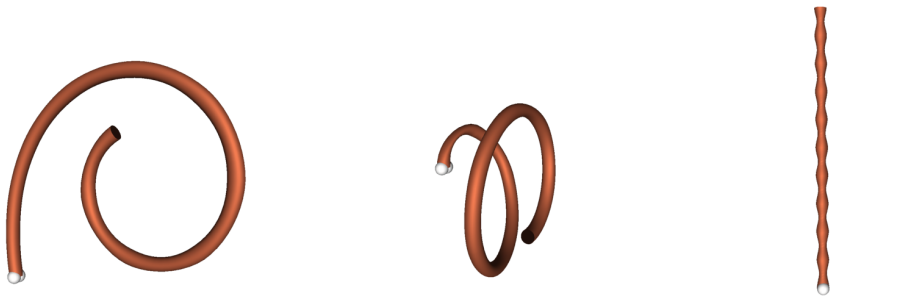


FIG. 5.4: *Différentes configurations cinématiques d'une tige de Kirchhoff. Une tige présentant une torsion nulle et une seule courbure non nulle reste dans le plan (a), tandis qu'une tige présentant une torsion nulle et deux courbures non nulles et non constantes le long de la tige peut sortir du plan (b). Lorsque les deux courbures sont nulles et que la torsion est non nulle, la courbe moyenne de la tige est selon une droite (c).*

Remarquons que la courbure géométrique κ_g et les deux courbures matérielles κ_1 et κ_2 sont liées par la relation :

$$\kappa_g \mathbf{n} = \kappa_2 \mathbf{n}_1 - \kappa_1 \mathbf{n}_2$$

où $\mathbf{n}$ est la normale principale du repère de Frenet.

En réalité, dans le cas particulier où l'une des deux courbures matérielles est nulle, le repère matériel coïncide avec le repère généralisé de Frenet (la courbe moyenne admettant une courbure et torsion géométriques pouvant être négatives). Par exemple, si $\kappa_2 = 0$, alors d'après les équations cinématiques du modèle de Cosserat, on trouve que $\mathbf{n_2}$ coïncide avec $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_1$ avec $\mathbf{b}$, κ_1 avec $-\kappa_g$ et τ avec $-\tau_g$, où $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est le repère de Frenet, κ_g la courbure géométrique et τ_g la torsion géométrique, tels que définis en Annexe A.

Dans toute la suite, notre système de tige sera repéré par le repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{F}}(s)$, et nous n'utiliserons *jamais* le repère de Frenet.

3 Équations de Kirchhoff

Soit une tige de Kirchhoff (*i.e.* une tige de Cosserat inextensible et non soumise au cisaillement), de section elliptique, et mobile dans le temps. A chaque instant t, sa configuration spatiale est donnée par le repère matériel mobile :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(s,t) = \{\mathbf{r}(s,t); (\mathbf{n}_1(s,t), \mathbf{n}_2(s,t), \mathbf{t}(s,t))\}. \tag{5.6}$$

Dans toute cette partie et sans mention particulière, les quantités $\mathbf{r}$, $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{t}$, κ_1, κ_2, τ, $\boldsymbol{\Omega}$, etc., sont des fonctions qui dépendent de la variable d'espace s et de la variable du temps t, mais par souci de clarté dans les équations, on s'autorisera à ne pas écrire systématiquement la dépendance en ces deux variables.

3.1 Équations cinématiques

Évolution spatiale de la tige

Sous les hypothèses de Kirchhoff, les seules déformations possibles spatiales pour la tige de Cosserat sont les suivantes : la tige peut localement se courber autour des deux axes $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$, ou bien s'enrouler autour d'elle-même, c'est-à-dire autour de l'axe tangent $\mathbf{t}$ (cela correspond aux déformations données dans le cas (b) de la Figure 5.2).

Les équations cinématiques pour l'évolution spatiale de la tige, données dans le cas général par les équations (5.1), se récrivent ici :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t} \tag{5.7a}$$

$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial s} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_i \tag{5.7b}$$

avec $\mathbf{u}_1 = \mathbf{n}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{n}_2 \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{t}$,

où $\mathbf{u}_i$ représente respectivement le vecteur $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ou $\mathbf{t}$ pour $i = 1$, 2 ou 3, et $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur de Darboux déjà introduit en Section 2.1 : ce vecteur caractérise la rotation locale de la tige autour de chacun des trois axes du repère matériel. Ici, l'expression de $\boldsymbol{\Omega}$ est donnée par :

$$\mathbf{\Omega} = \kappa_1 \mathbf{n}_1 + \kappa_2 \mathbf{n}_2 + \tau \mathbf{t}. \tag{5.8}$$

En utilisant cette expression, l'équation (5.7b) peut alors se développer sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial s} = \tau \mathbf{n}_2 - \kappa_2 \mathbf{t} \tag{5.9a}$$
$$\frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial s} = -\tau \mathbf{n}_1 + \kappa_1 \mathbf{t} \tag{5.9b}$$
$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_2 \mathbf{n}_1 - \kappa_1 \mathbf{n}_2. \tag{5.9c}$$

Évolution temporelle de la tige

La dérivée temporelle du repère matériel fournit les équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v} \tag{5.10a}$$
$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = \mathbf{\Lambda} \wedge \mathbf{u}_i \tag{5.10b}$$

où $\mathbf{v}(s,t)$ est le vecteur vitesse et $\mathbf{\Lambda}(s,t)$ le vecteur rotation instantanée de la tige au temps t et au point s.

3.2 Équations dynamiques

On considère une portion infinitésimale de la tige, comprise entre la section droite en s et la section droite en $s+\delta s$, sur laquelle on applique le principe fondamental de la dynamique, à savoir la conservation de la quantité de mouvement et la conservation du moment cinétique.

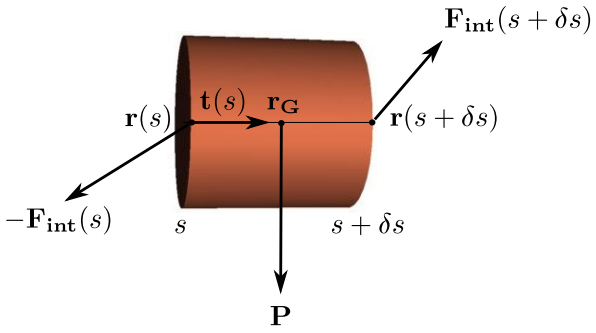


FIG. 5.5: *Bilan des forces appliquées sur une portion infinitésimale de tige, comprise entre les sections droites s et $s+\delta s$.*

Forces en présence

Soit ρ la masse volumique (constante) de la tige et S l'aire d'une section quelconque de la tige, supposée constante le long de la tige. La portion infinitésimale de la tige considérée a donc pour masse $\rho S \delta s$, et elle est soumise à deux types de forces :

– Une force extérieure à la tige (le poids ou le frottement de l'air par exemple), notée $\mathbf{P}\,\delta s$, où $\mathbf{P}$ désigne la densité linéique de la force appliquée sur la tige (force par unité de longueur, exprimée en N/m). Si on veut prendre en compte la gravité dans le modèle, on remplacera donc $\mathbf{P}$ par l'expression $\rho S\mathbf{g}$ où $\mathbf{g}$ est le champ gravitationnel.
– Une force interne à la tige, qui est la force appliquée sur la portion de longueur δs par le reste de la tige. La propriété suivante donne une expression pour cette force.

Propriété 5.1 *Soit $\mathbf{F_{int}}(s)$ la force (en N) transmise à travers la section en s par la portion de la tige située en $s' > s$ (à droite) sur la portion de la tige située en $s' < s$. Alors $\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)$ est la force (en N) exercée sur la portion de la tige située entre les sections droites en s et en $s+\delta s$ par le reste de la tige.*

Cette propriété se démontre facilement grâce aux principes de superposition des forces et d'action-réaction. Noter que par le principe d'action-réaction, la force transmise à travers la section en s par la portion de la tige située en $s' < s$ (à gauche) est $-\mathbf{F_{int}}(s)$ (voir Figure 5.5).

Bilan de la quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement sur une portion δs de la tige s'écrit donc :

$$\rho S\,\delta s\,\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) = \mathbf{F_{int}}(s+\delta s,t) - \mathbf{F_{int}}(s,t) + \mathbf{P}(t)\,\delta s.$$

En divisant cette équation par δs et en faisant tendre δs vers 0, on obtient alors l'équation différentielle suivante pour la tige :

$$\rho S\,\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) = \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{P}(t). \tag{5.11}$$

Rappelons que $\mathbf{F_{int}}(s)$ désigne la force transmise à travers la section en s par la portion de la tige située en $s' > s$ sur la portion de la tige située en $s' < s$, $\mathbf{P}$ désigne la densité linéique de force appliquée sur la tige, ρ sa masse volumique, et S l'aire de sa section.

Moments en présence

Trois types de moments peuvent s'exercer sur la portion infinitésimale de la tige considérée :
– Un moment appliqué de l'extérieur sur la tige (par exemple, un couple appliqué sur le bout libre par un objet extérieur), noté $\mathbf{Q}\,\delta s$, où $\mathbf{Q}$ désigne la densité linéique du moment appliqué sur la tige (moment par unité de longueur, exprimé en N). Dans la suite, on considérera qu'il n'y a pas de moment appliqué de l'extérieur.
– Le moment résultant des forces extérieures appliquées sur la portion δs de la tige. La force $\mathbf{P}\,\delta s$ n'applique pas de moment puisqu'elle est répartie uniformément à l'intérieur de la portion considérée, mais la force interne à la tige $\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)$ applique au point $\mathbf{r_G}$, centre de gravité du morceau δs de tige, le couple :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F_{int}}} = (\mathbf{r}(s+\delta s) - \mathbf{r_G}) \wedge \mathbf{F_{int}}(s+\delta s) + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}) \wedge (-\mathbf{F_{int}}(s)).$$

En effectuant les développements limités de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{F_{int}}$ autour de s, au second ordre, $\mathbf{r}(s+\delta s) = \mathbf{r}(s) + \delta s\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + o(\delta s^2)$ et $\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) = \mathbf{F_{int}}(s) + \delta s\,\frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s} + o(\delta s^2)$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathbf{F_{int}}} &= (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}) \wedge (\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)) + (\delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s) + o(\delta s^2)) \wedge (\mathbf{F_{int}}(s+\delta s)) \\
&= (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}) \wedge \left(\delta s \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s}(s) + o(\delta s^2)\right) + \left(\delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s) + o(\delta s^2)\right) \wedge (\mathbf{F_{int}}(s+\delta s)).
\end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}$ peut s'écrire, à un facteur multiplicatif constant près, $\delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s) + o(\delta s^2)$ (car $\mathbf{r}(s) \simeq \mathbf{r_G}$), donc au premier ordre, il ne reste dans l'expression de $\mathbf{M}_{\mathbf{F_{int}}}$ que le second terme :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F_{int}}} \simeq \delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s) = \delta s \, \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s)$$

où $\mathbf{t}(s) = \frac{\mathbf{r}(s+\delta s) - \mathbf{r}(s)}{\delta s}$ est le vecteur tangent à la tige en s (voir Figure 5.5).

– Le moment résultant des efforts de contact sur les sections droites s et $s + \delta s$, appelé moment interne. La propriété suivante donne une expression pour ce moment.

Propriété 5.2 *Soit $\mathbf{M_{int}}(s)$ le moment (en $N \cdot m$) transmis à travers la section en s par la portion de la tige située en $s' > s$ sur la portion de la tige située en $s' < s$. Alors $\mathbf{M_{int}}(s + \delta s) - \mathbf{M_{int}}(s)$ est le moment (en $N \cdot m$) exercé sur la portion de la tige située entre les sections droites en s et en $s + \delta s$ par le reste de la tige.*

Équilibre des moments

Le théorème du moment cinétique indique qu'il y a égalité entre la dérivée temporelle du moment cinétique du système par rapport à son centre de gravité, et la somme des moments extérieurs. Cet équilibre des moments donne donc, sur la portion δs de tige considérée :

$$\mathbf{M_{int}}(s + \delta s, t) - \mathbf{M_{int}}(s, t) + \mathbf{t}(s, t) \wedge \mathbf{F_{int}}(s, t) \, \delta s = \rho \delta s \, \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial t}(s, t)$$

où $\mathbb{J} \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt}$ représente la dérivée du moment cinétique de la portion de tige δs, considérée comme un petit solide cylindrique indéformable. $\mathbf{\Lambda}$ est le vecteur rotation instantanée de la tige en s, introduit dans les équations (5.10), et $\mathbb{J}$ la matrice d'inertie de la portion de tige δs. En fait, on montre que l'on peut négliger le terme de droite de l'équation ci-dessus (approximation faite par Kirchhoff lui-même). En effet, $\mathbb{J}$ vaut en ordre de grandeur a^4 (voir Section 3.4), où a désigne le rayon typique de la section de la tige, et si l'on compare en ordre de grandeur le membre de droite de l'équation par rapport au membre de gauche, on obtient :

$$\frac{\rho \, \| \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial t} \|}{\| \mathbf{F_{int}} \|} \sim \frac{\rho S a^2 / T^2}{(\rho S L) \, g} \sim \frac{a^2}{L^2} \text{ avec } a \ll L$$

où T désigne un temps caractéristique, g l'accélération de la pesanteur, L la longueur typique de la tige, avec $L = g T^2$. On a bien sûr $a \ll L$, donc le terme d'inertie est bien négligeable dans l'équation des moments. On le prend égal à zéro dans la suite (on conservera un terme d'inertie non nul uniquement dans l'équation des forces (5.11)).

En divisant l'équation précédente des moments par δs et en faisant tendre δs vers 0, on obtient alors l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \mathbf{M_{int}}}{\partial s}(s, t) + \mathbf{t}(s, t) \wedge \mathbf{F_{int}}(s, t) = \mathbf{0} \tag{5.12}$$

Rappelons que $\mathbf{M_{int}}(s)$ est le moment interne transmis à travers la section en s de la tige, $\mathbf{F_{int}}(s)$ la force interne transmise à travers la section en s de la tige, et $\mathbf{t}(s)$ le vecteur unitaire tangent à la courbe moyenne de la tige en s.

3.3 Configuration de la tige au repos

Comme mentionné au Chapitre 1, un cheveu peut être bouclé naturellement. Cette frisure naturelle et intrinsèque peut être modélisée très simplement dans les équations de Kirchhoff en choisissant des valeurs au repos non nulles pour les courbures et torsion de la tige. Nous appellerons ces quantités au repos les *courbures et torsion naturelles* de la tige (ou encore courbures et torsion *spontanées*), et nous les noterons respectivement $\kappa_1^0(s)$, $\kappa_2^0(s)$, et $\tau^0(s)$. Ces paramètres décrivent l'état de repos du système, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée sur la tige (à ne pas confondre avec les courbures et torsion *matérielles* $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\tau(s)$ de la tige, qui décrivent l'état mécanique réel du système, sous l'action des forces environnantes).

Dans le cas des cheveux, il paraît raisonnable de supposer que les courbures et torsion naturelles sont à peu près constantes le long du cheveu ; en effet, comme nous l'avons vu au Chapitre 1, la frisure naturelle d'un cheveu est prédéterminée par son follicule pileux, et on peut donc penser qu'elle reste inchangée durant toute la phase de croissance du cheveu. Nous verrons aux Chapitres 6 et 7 plusieurs exemples de simulation avec des valeurs de repos constantes le long de la tige, ou, au contraire, soumises à une légère variation. Pour l'instant, nous gardons la dépendance en s de ces variables pour plus de généralité. Les courbures et torsion spontanées interviennent dans les équations dynamiques de Kirchhoff *via* la loi constitutive de matériau, présentée ci-après.

3.4 Loi de comportement du matériau

Bien que l'on ait vu au Chapitre 1 que la tige capillaire est constituée de plusieurs couches concentriques de compositions différentes, on peut considérer, à l'échelle macroscopique, que le matériau constituant le cheveu est parfaitement homogène et isotrope. Dans l'hypothèse des petites déformations en courbure et en torsion du matériau (hypothèse également faite par Kirchhoff), on pourra prendre une réponse du matériau élastique et linéaire (loi de Hooke), comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_{int}}(s,t)\cdot\mathbf{n}_1(s,t) &= EI_1\left(\kappa_1(s,t)-\kappa_1^0(s,t)\right)\\
\mathbf{M_{int}}(s,t)\cdot\mathbf{n}_2(s,t) &= EI_2\left(\kappa_2(s,t)-\kappa_2^0(s,t)\right)\\
\mathbf{M_{int}}(\mathbf{s},\mathbf{t})\cdot\mathbf{t}(s,t) &= \mu J\left(\tau(s,t)-\tau^0(s,t)\right).
\end{aligned}$$

Cette loi peut s'écrire de manière plus condensée sous forme matricielle, dans la base matérielle $(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{t})$:

$$\mathbf{M_{int}}(s,t)=\mathbb{K}(\boldsymbol{\kappa}(s,t)-\boldsymbol{\kappa}^0(s,t)) \tag{5.13}$$

$$\text{où } \mathbb{K}=\begin{pmatrix} EI_1 & 0 & 0\\ 0 & EI_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu J\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\kappa}=\begin{pmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\\ \tau\end{pmatrix} \text{ et } \quad \boldsymbol{\kappa}^0=\begin{pmatrix}\kappa_1^0\\ \kappa_2^0\\ \tau^0\end{pmatrix}.$$

Dans ces équations, $\mathbb{K}$ désigne la matrice de raideur du matériau (supposée constante), E le module d'Young (ou module d'élasticité), μ le module de cisaillement, défini par la relation

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad \text{avec } \sigma \text{ le coefficient de Poisson,}$$

I_i le moment d'inertie de la section par rapport à chacun des deux axes $\mathbf{n}_i$, et μJ la rigidité de torsion, J désignant le moment d'inertie axial. Les formules classiques [LL76] pour les moments d'inertie dans le cas d'une ellipse de rayons principaux a_1 et a_2 sont, pour la flexion :

$$I_1=\frac{\pi}{4}a_1a_2^3 \qquad I_2=\frac{\pi}{4}a_1^3a_2,$$

et pour la torsion :

$$J = \pi \frac{a_1^3 a_2^3}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Remarquons que, même si la loi constitutive du matériau choisie est linéaire, les déplacements subis par la tige peuvent être *non-linéaires*, à cause des équations cinématiques (5.9) non-linéaires, qui décrivent des rotations infinitésimales du repère matériel le long de la tige. Ainsi, bien que l'on se place dans l'hypothèse des petites déformations en courbure et en torsion, les équations de Kirchhoff nous permettent de gérer de grands déplacements en position pour la tige.

3.5 Conditions aux limites

Nous supposerons dans toute notre étude que le système mécanique de cheveu considéré est *encastré* au bord $s = 0$ (dans le cuir chevelu), l'autre bord $s = L$ étant *libre*. Ces hypothèses entraînent des conditions aux limites pour la tige.

Au bord encastré $s = 0$, toutes les quantités cinématiques pour le repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ sont imposées par l'angle d'encastrement de la tige, et par le mouvement du cuir chevelu. On a, en position :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0,t) = \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(t) \\ \mathbf{n}_i(0,t) = \mathbf{n}_{i,\mathrm{c}}(t) \text{ pour } i = 0,1,2 \end{cases} \tag{5.14}$$

puis en vitesse (translation et rotation) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(0,t) = \mathbf{v}_{\mathrm{c}}(t) \\ \boldsymbol{\Lambda}(0,t) = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{c}}(t) \end{cases} \tag{5.15}$$

et en accélération (translation et rotation) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(0,t) = \mathbf{a}_{\mathrm{c}}(t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial t}(0,t) = \boldsymbol{\Lambda}_{t,\mathrm{c}}(t). \end{cases} \tag{5.16}$$

Les quantités indexées par la lettre c caractérisent le mouvement du cuir chevelu et sont connues à chaque pas de temps : elles peuvent être déduites du mouvement de la tête du personnage animé.

Au bord libre $s = L$, la force interne et le moment interne de la tige sont nuls :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}}(L,t) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{M}_{\mathbf{int}}(L,t) = \mathbf{0}. \tag{5.17}$$

Remarquons, en examinant à nouveau la relation constitutive du matériau (5.13), que la condition au bord sur le moment interne impose au bord libre de la tige *l'égalité* entre les courbures et torsions matérielles $(\kappa_1(L), \kappa_2(L), \tau(L))$ et les courbures et torsions spontanées $(\kappa_1^0(L), \kappa_2^0(L), \tau^0(L))$. S'il n'y a pas d'effort extérieur ponctuel exercé sur le bord libre de la tige, la configuration de la tige tend vers sa configuration de repos à l'extrémité libre.

4 Méthodes pour la résolution numérique

Récapitulons ce que nous venons de voir. Ce que l'on désigne par *équations de Kirchhoff pour les tiges élastiques* est en fait l'ensemble des équations de (5.9) à (5.16). Ces équations présentent des non-linéarités spatiales, ainsi que des conditions aux limites en chaque bord de la tige. Pour aider le lecteur à mieux visualiser les non-linéarités des équations de Kirchhoff, nous lui proposons de se

référer à l'Annexe B, qui présente le cas simplifié d'une tige 2D statique (*elastica d'Euler*), dans lequel les termes non-linéaires des équations sont clairement visibles.

Les problèmes non-linéaires avec conditions aux limites sont difficiles à résoudre numériquement [AP88], et c'est sans doute l'une des raisons pour laquelle le modèle de tige de Kirchhoff n'a que très rarement été exploité en simulation numérique de tiges. À notre connaissance, seules quelques approches ont proposé une implémentation du modèle dans le cas statique [Pai02], mais jamais dans le cas dynamique.

4.1 Choix d'une paramétrisation appropriée

Coordonnées généralisées *vs* coordonnées 3D

Dans les travaux précédents (Chapitres 3 et 4), nous avions paramétré notre système par l'ensemble des positions et vitesses 3D des particules (masses ponctuelles) composant le système. L'inconvénient d'une telle paramétrisation est qu'elle n'exprime pas les vrais degrés de liberté du système : il faut ajouter des contraintes extérieures afin que les propriétés souhaitées pour le système soient vérifiées (dans notre cas, nous avions ajouté des contraintes entre les particules pour former des chaînes inextensibles).

Une autre solution consiste à proposer une paramétrisation du système qui inclut le maximum de contraintes internes : c'est ce qu'on appelle la paramétrisation par *coordonnées généralisées*. Ce type de paramétrisation est détaillée en Annexe C. Elle permet d'exprimer les vrais degrés de liberté mécaniques du système considéré, et donc de s'affranchir de toutes les contraintes internes du système. A titre d'exemple, la Figure 5.6 compare la paramétrisation par coordonnées 3D et la paramétrisation par coordonnées généralisées, dans le cas du pendule simple.

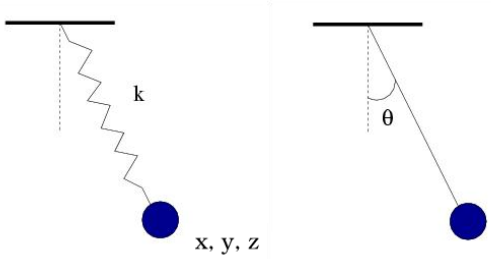


FIG. 5.6: *L'exemple du pendule simple. À gauche : pendule paramétré par la position* (x,y,z) *d'une particule libre. La contrainte du fil inextensible liant la particule au support est ici modélisée par un ressort raide, qui va introduire des instabilités dans la dynamique du système. À droite : pendule paramétré par l'angle* θ *(angle entre la verticale et le fil). Dans ce cas, la contrainte du fil inextensible est déjà intégrée dans le modèle, il n'est pas nécessaire d'ajouter une contrainte externe.*

Nous avons choisi d'utiliser une paramétrisation par coordonnées généralisées, car cette paramétrisation émerge naturellement des équations physiques du système ; de plus, il nous paraît très avantageux de pouvoir inclure toutes les contraintes du système (par exemple, le fait qu'un cheveu soit inextensible) dans le modèle en lui-même, sans avoir à imposer par-dessus le modèle des contraintes pseudo-physiques. Mais comme nous l'avons mentionné au Chapitre 2, ce choix de paramétrisation soulève ensuite des problèmes dans la gestion des collisions : en effet, le pendant d'une paramétrisation d'un système par ses coordonnées généralisées est la difficulté à interagir ensuite avec le système.

Paramètres indépendants d'une tige de Kirchhoff

Revenons à la cinématique des tiges de Kirchhoff, donnée en 3.1. Il est important de remarquer que les trois paramètres torsion et courbures matérielles - que l'on notera sous la forme condensée $(\kappa_i(s,t))_{i=0,1,2} = (\tau(s,t), \kappa_1(s,t), \kappa_2(s,t))$, avec la convention $\kappa_0(s) = \tau(s)$ - peuvent servir à reconstruire la forme géométrique de la tige de manière univoque, à un pas de temps donné : en effet, la courbe moyenne $\mathbf{r}$ et les repères matériels $\mathbf{n}_i$ peuvent se calculer de manière symbolique en intégrant les équations (5.7b) puis (5.7a) par rapport à s, un processus que nous appelons la *reconstruction*. La torsion et les courbures $(\kappa_i(s,t))_{i=0,1,2}$ forment donc une paramétrisation valide pour la tige, puisqu'elles expriment les vrais degrés de liberté du système. Dans la suite, nous utilisons donc cette paramétrisation, qui est de loin supérieure à la paramétrisation d'origine basée sur les quantités $\mathbf{r}(s,t)$ and $\mathbf{n}_i(s,t)$: en effet, contrairement à ces paramètres, les $(\kappa_i(s,t))_{i=0,1,2}$ sont *affranchis de toute contrainte* puisque la condition d'inextensibilité de la tige est incorporée dans le processus de reconstruction par l'équation (5.7a).

À nouveau, le lecteur pourra consulter l'Annexe B pour comprendre, par une illustration simple dans le cas 2D, comment il est possible de formuler l'ensemble des équations de Kirchhoff en fonction des coordonnées généralisées du système (dans le cas 2D, il n'y a qu'une seule coordonnée généralisée $\theta(s)$, représentant l'angle entre la courbe moyenne de la tige et l'axe horizontal, et les équations de Kirchhoff mènent à une unique équation scalaire dynamique, paramétrée par θ).

4.2 Discrétisation spatiale : modèle de Super-Hélice

Nous abordons la discrétisation spatiale, et gardons le temps continu pour l'instant. Nous commençons par énoncer une propriété très importante, qui va servir de base à notre modèle numérique de tige de Kirchhoff :

Propriété 5.3 *Si κ_1, κ_2 et τ sont constantes le long de la tige de Cosserat (*i.e. *indépendantes de s), alors la configuration spatiale de la courbe moyenne $\mathbf{r}$ de la tige est une* hélice.

Pour une meilleure compréhension du modèle discret de tige de Kirchhoff que nous proposons dans la suite, sous le nom de *Super-Hélice*, nous conseillons au lecteur d'examiner attentivement la démonstration de la propriété ci-dessus, donnée en Annexe D.

Super-Hélice

Divisons maintenant la tige en N éléments $s \in S_Q$ d'indice Q. L'intervalle $[0,L]$ est subdivisé en N segments $(S_Q)_{Q\in[1..N]}$. Ici, les lettres en capital telles que Q désigneront des variables sur chaque morceau (et non sur des nœuds) et donc prendront implicitement les valeurs $1 \leq Q \leq N$. Soit $\chi_Q(s)$ la fonction caractéristique pour le morceau S_Q. Nous définissons alors le nouveau modèle déformable discret de Super-Hélice comme suit :

Définition 5.5 *On appellera* Super-Hélice *une tige de Kirchhoff telle que ses torsion et courbures $\tau(s,t)$, $\kappa_1(s,t)$, $\kappa_2(s,t) = (\kappa_i(s,t))_{i=0,1,2}$ sont des fonctions constantes par morceaux le long de la tige :*

$$\kappa_i(s,t) = \sum_{1\leq Q\leq N} \chi_Q(s)\,\kappa_{i,Q}(t) \quad \textit{pour } i = 0,1,2 \tag{5.18}$$

où les quantités $\kappa_{i,Q}$ représentent les valeurs constantes des torsion et courbures de la tige sur chaque élément S_Q (avec la convention $\kappa_{0,Q} = \tau_Q$). De plus, on impose la continuité du repère matériel à la jonction entre deux morceaux de tige successifs.

D'après la propriété 5.3, on déduit que la courbe moyenne $\mathbf{r}(s,t)$ d'une Super-Hélice est une *hélice par morceaux*. De plus, il est aisé de voir que la condition de continuité du repère matériel le long de la tige impose la continuité C^1 de la courbe moyenne. Finalement, on en conclut que la courbe moyenne $\mathbf{r}(s,t)$ d'une Super-Hélice est une courbe *régulière et hélicoïdale par morceaux*, d'où le nom choisi de *Super-Hélice* pour désigner une telle tige.

Processus de reconstruction

Les degrés de liberté d'une Super-Hélice sont donc les $3N$ paramètres $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q\in[1..N]}$ qui représentent les torsion et courbures de la tige, constantes sur chaque morceau S_Q. Notons $\boldsymbol{\kappa}$ le vecteur de taille $3N$, composé des $3N$ paramètres décrits ci-dessus :

$$\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mathrm{t}}\left(\tau_1, \kappa_{1,1}, \kappa_{2,1}, \cdots, \tau_Q, \kappa_{1,Q}, \kappa_{2,Q}, \cdots, \tau_N, \kappa_{1,N}, \kappa_{2,N}\right).$$

Ce vecteur définit donc l'ensemble des *coordonnées généralisées* de la Super-Hélice. On notera $\kappa_i^{\mathrm{SH}}(s,\mathbf{q},t)$ la torsion et les courbures, constantes par morceaux, qui se déduisent directement de ce vecteur, et $\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)$ et $\mathbf{n}_i^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)$ la courbe moyenne et les repères matériels obtenus par reconstruction.

L'Annexe D montre que cette reconstruction peut être effectuée de manière purement analytique, en commençant l'intégration du bord encastré $s=0$, et en utilisant une solution symbolique pour avancer d'un élément au suivant. Au final, on obtient des *expressions explicites* pour les $\mathbf{n}_i^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)$ et pour $\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)$, données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [0..2] \qquad \mathbf{n}_i^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t) &= \sum_{1\le Q\le N} \mathbf{n}_{i,Q}(s-s_{Q-1})\,\chi_Q(s) \\
\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t) &= \sum_{1\le Q\le N} \mathbf{r}_Q(s-s_{Q-1})\,\chi_Q(s)
\end{aligned}$$

avec les expression formelles de $\mathbf{t}_Q$, $\mathbf{n}_{1,Q}$, $\mathbf{n}_{2,Q}$ et $\mathbf{r}_Q$ données par les formules suivantes, sur chaque morceau de tige S_Q (*i.e.* pour $s\in[s_{Q-1},s_Q]$, en effectuant le changement de variable $u=s-s_{Q-1}$) :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{t}_Q(u) = \frac{\tau_Q}{\Omega_Q}\mathbf{v}_{0,Q} + \frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\cos(\Omega_Q u)\,\mathbf{v}_{1,Q} + \frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\sin(\Omega_Q u)\,\mathbf{v}_{2,Q} \\
\mathbf{n}_{1,Q}(u) = \frac{\kappa_{1,Q}}{\Omega_Q}\mathbf{v}_{0,Q} - \left(\frac{\tau_Q\kappa_{1,Q}}{\Omega_Q\kappa_Q}\cos(\Omega_Q u) + \frac{\kappa_{2,Q}}{\kappa_Q}\sin(\Omega_Q u)\right)\mathbf{v}_{1,Q} + \left(\frac{\kappa_{2,Q}}{\kappa_Q}\cos(\Omega_Q u) - \frac{\tau_Q\kappa_{1,Q}}{\Omega_Q\kappa_Q}\sin(\Omega_Q u)\right)\mathbf{v}_{2,Q} \\
\mathbf{n_2}_{,Q}(u) = \frac{\kappa_{2,Q}}{\Omega_Q}\mathbf{v}_{0,Q} + \left(\frac{\kappa_{1,Q}}{\kappa_Q}\sin(\Omega_Q u) - \frac{\tau_Q\kappa_{2,Q}}{\Omega_Q\kappa_Q}\cos(\Omega_Q u)\right)\mathbf{v}_{1,Q} - \left(\frac{\tau_Q\kappa_{2,Q}}{\Omega_Q\kappa_Q}\sin(\Omega_Q u) + \frac{\kappa_{1,Q}}{\kappa_Q}\cos(\Omega_Q u)\right)\mathbf{v}_{2,Q}
\end{array}\right.$$

$$\mathbf{r}_Q(u) = \mathbf{r}_Q(0) + \left(\frac{\tau}{\Omega_Q}\mathbf{v_0}_{,Q}\right)u + \left(\frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\mathbf{v_1}_{,Q}\right)\frac{\sin(\Omega_Q u)}{\Omega_Q} + \left(\frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\mathbf{v_2}_{,Q}\right)\frac{1-\cos(\Omega_Q u)}{\Omega_Q} \tag{5.19}$$

où $\kappa_Q = \sqrt{\kappa_{1,Q}^2+\kappa_{2,Q}^2}$, $\Omega_Q = \sqrt{\kappa_Q^2+\tau_Q^2}$, et $(\mathbf{v_0}_{,Q}, \mathbf{v_1}_{,Q}, \mathbf{v_2}_{,Q})$ est la *base adaptée* de l'élément S_Q, constante sur cet élément. Les points clefs de ces calculs sont donnés en Annexe D.

Intérêt du modèle de Super-Hélice

Remarquons que le modèle de Super-Hélice correspond en fait à une *réduction du nombre de degrés de liberté en espace* de la tige de Kirchhoff. Grâce à ce modèle, on passe ainsi d'un nombre infini de degrés de liberté $(\kappa_i(s))_{i=0,1,2}$, $s\in[0,L]$ à un nombre discret et fini de degrés de liberté pour la tige $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q\in[1..N]}$. Nous verrons dans la suite que, grâce au formalisme de Lagrange, il sera possible de transposer les équations continues des tiges de Kirchhoff pour ce nouveau système à degrés de liberté

finis (nous appellerons ces nouvelles équations *équations des Super-Hélices*). Tout l'avantage de cette méthode sera alors de *ne faire aucune approximation en espace*[1] lors de la résolution numérique des nouvelles équations mécaniques, puisque ces dernières seront déjà paramétrées par un nombre fini de coordonnées généralisées. Dans le cas dynamique, une fois les équations des Super-Hélices écrites, il restera alors à trouver un schéma numérique performant pour la discrétisation temporelle.

L'Annexe C présente le formalisme de Lagrange et un exemple simple de discrétisation d'un système continu par réduction du nombre de ses degrés de liberté. Le lecteur pourra d'ores et déjà s'y référer pour une meilleure compréhension de la suite (en particulier du Chapitre 7).

5 Bilan

Nous avons décrit dans ce chapitre les principales caractéristiques du modèle mécanique de tige de Kirchhoff, et tâché d'en retranscrire les équations cinématiques et mécaniques de la manière la plus claire possible vis-à-vis d'un non-spécialiste de la mécanique. Contrairement aux précédents modèles utilisés pour simuler des cheveux individuels, ce modèle intègre à lui tout seul toutes les propriétés souhaitables et nécessaires pour représenter le comportement d'un cheveu de manière réaliste, à savoir les déformations élastiques en courbure et en torsion, les effets non-linéaires caractéristiques (mis en évidence dans les deux chapitres suivants), ou encore la contrainte d'inextensibilité de la tige. Dans la suite, tout l'enjeu consistera, d'une part, à proposer une méthode de simulation numérique de ce modèle ; nous verrons que les méthodes proposées s'appuieront avantageusement sur le modèle discret de Super-Hélice introduit dans ce chapitre. D'autre part, il s'agira de montrer que ce modèle de tige mécanique est bien adapté - en termes de réalisme, de stabilité numérique, et de performances - à des applications virtuelles mettant en jeu des chevelures complètes, telles que la coiffure virtuelle (Chapitre 6) ou l'animation de chevelures (Chapitre 7).

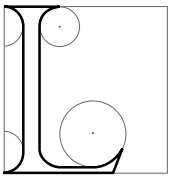


FIG. 5.7: *Mascottes chevelues, ©Le 9 Télécom*

[1] L'approximation spatiale du modèle continu de tige de Kirchhoff aura déjà été réalisée par le choix de courbures et torsion constantes par morceau, et donc en nombre fini, dans le modèle de Super-Hélice. L'intérêt d'une telle réduction du nombre de degrés de liberté d'un système mécanique continu, plutôt qu'une discrétisation standard consistant à trouver une solution approchée des équations continues du système (par différences finies ou éléments finis) est, comme nous l'avons vu au Chapitre 2, de pouvoir ensuite formuler des équations mécaniques *compatibles* avec le nouveau système mécanique discret, qui garantiront en particulier la conservation de son énergie mécanique.

CHAPITRE 6

Simulation statique de chevelures



ES LOGICIELS existants pour la coiffure virtuelle se basent essentiellement sur des approches géométriques pour la modélisation : un peu comme un dessinateur, l'utilisateur trace autour d'une tête virtuelle des courbes, des surfaces ou des volumes, qui vont servir à définir le support de la chevelure du personnage, puis il ajoute des détails procéduraux (boucles, ondulations), jusqu'à parvenir à la coiffure désirée. Au cours de la modélisation, la physique du cheveu et tous les mécanismes physiques liés aux opérations de coiffage sont donc complètement (et délibérément) ignorés, l'unique but étant de parvenir à l'image de la coiffure finale souhaitée. À l'opposé de ces approches, nous nous intéressons aux *phénomènes physiques* liés à la pousse de cheveux et à la coiffure. Dans un contexte de prototypage pour l'industrie cosmétique, comprendre l'influence des propriétés physiques, structurelles et ethniques des cheveux sur la forme de la chevelure au repos est en effet essentiel afin d'identifier ensuite les paramètres à modifier (par un produit cosmétique) pour obtenir tel ou tel effet. Ce pas significatif vers la simulation *physique* de coiffures fait par ailleurs percevoir de nouvelles applications dans le domaine de la réalité virtuelle : par exemple, l'entraînement à la coupe de cheveux par simulation, pour les apprentis coiffeurs ; ou encore, à destination du grand public, la prédiction de l'apparence d'une personne réelle après une coupe, calculée automatiquement à partir des caractéristiques de ses propres cheveux (données microscopiques, carte d'implantation sur le cuir chevelu, etc.).

Dans ce chapitre, nous présentons de premiers travaux menés dans ce sens, le but étant de générer des chevelures naturelles de manière physiquement réaliste, en tenant compte des propriétés physiques, structurelles et ethniques des cheveux individuels. Notre méthode s'appuie sur la physique des tiges de Kirchhoff présentée au chapitre précédent, appliquée ici dans le cas statique. La Section 1 décrit le simulateur statique de cheveu unique mis au point par Basile Audoly en 2001, dans le cadre

de la collaboration avec L'Oréal sur la modélisation de cheveux : dans ce modèle, appelé `Hair3D`, la forme à l'équilibre d'un cheveu est calculée de manière stable et efficace par la minimisation de son énergie potentielle. Nous mettons également en évidence les paramètres physiques importants du simulateur qui nous seront utiles par la suite pour générer des formes de cheveux réalistes. En Section 2 nous proposons une extension de ce modèle de cheveu unique à l'échelle d'une chevelure complète. Notre logiciel final est capable de prédire la forme d'une chevelure naturelle, pour des types ethniques variés, et à partir d'un nombre réduit de paramètres intuitifs. Dans cette seconde partie, nous présentons également l'interface utilisateur mise en place pour créer des coiffures rapidement, et de manière intuitive. Cette interface offre à l'utilisateur la possibilité de réaliser virtuellement des opérations de coiffure classiques telles que le mouillage, la coupe et le séchage. Enfin, nous présentons en Section 3 des résultats de coiffures obtenus ainsi qu'une validation de notre approche.



FIG. 6.1: *Cheveux bouclés réels* vs. *synthétiques. De gauche à droite : configuration à l'équilibre d'un cheveu bouclé ; mèche générée de manière procédurale à partir de ce cheveu ; mèche réelle dont on s'est inspiré pour la modélisation ; chevelure complète composée d'une centaine de mèches ; chevelure réelle dont on s'est inspiré pour la modélisation.*

Le travail développé dans ce chapitre a fait l'objet d'un papier court à Eurographics en 2005 [BAQ+05], ainsi que d'une présentation à l'AFIG en 2005 [BAC+05] (prix du second meilleur papier).

1 Modèle statique d'un cheveu unique

Nous nous plaçons dans le cas statique des tiges de Kirchhoff (plus de dépendance en la variable temps t). Nous considérons pour l'instant que le cheveu est uniquement soumis au champ de la pesanteur. Les autres forces extérieures (notamment les forces de contact) seront considérées en Section 2.2.

Sous ces hypothèses, les équations mécaniques de Kirchhoff (5.11) et (5.12) se récrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s}(s) + \rho S \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{M_{int}}}{\partial s}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Ces équations, combinées aux équations cinématiques (5.9), sont non-linéaires, en particulier à cause du terme $\mathbf{t} \wedge \mathbf{F_{int}}$ dans l'équation des moments (voir Annexe B pour une réécriture explicite de ce terme dans le cas 2D).

De plus, on a toujours les conditions au bord suivantes pour la tige :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_c \\ \mathbf{n}_i(0) = \mathbf{n}_{i,c} \text{ pour } i = 0,1,2 \\ \mathbf{F_{int}}(L) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M_{int}}(L) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Une solution consisterait à résoudre numériquement ces équations statiques de Kirchhoff. Cette approche, suivie par Pai [Pai02], mène à un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires avec des conditions aux limites aux deux extrémités de la tige. Ce type d'équations ne peut se résoudre que de manière itérative, *via* une méthode de tir par exemple [AP88], et la non-unicité de la solution peut soulever d'importantes difficultés numériques. Pour éviter ces problèmes, les équations de Kirchhoff statiques sont exprimées, de manière physiquement équivalente, sous la forme d'un problème de minimisation d'énergie potentielle. Cette nouvelle formulation s'avère beaucoup plus facile à résoudre et plus robuste. En effet, elle garantit de trouver *une* position d'équilibre *stable* de la tige, pour un jeu de paramètres donné en entrée caractérisant la géométrie, l'encastrement et les propriétés physiques de la tige.

Après une description de ce modèle statique, nous montrons et analysons les formes de cheveu pouvant être générées par ce modèle, et présentons quelques résultats de validation.

1.1 Énergie potentielle

Nous cherchons les configurations à l'équilibre d'un cheveu soumis au champ gravitationnel, connaissant ses caractéristiques géométriques (longueur, rayon moyen et excentricité de la section elliptique, angle d'encastrement de la tige) et physiques (matrice de raideur, courbures et torsion naturelles). De manière générale, les configurations d'équilibre d'un système physique peuvent être obtenues par la recherche des minima de son énergie potentielle. L'énergie potentielle d'une tige de Kirchhoff soumise au champ de pesanteur s'écrit :

$$\mathcal{E}_{hair} = \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_e \tag{6.3}$$

où $\mathcal{E}_e$ est l'énergie élastique interne de la tige et $\mathcal{E}_g$ l'énergie potentielle de pesanteur. Notons que cette formulation de l'équilibre statique d'une tige de Kirchhoff est *physiquement équivalente* aux équations statiques de Kichhoff (6.1), les équations statiques découlant de la formulation énergétique par l'opérateur gradient. En supposant que le matériau constituant le cheveu obéit à la loi de Hooke donnée par l'équation (5.13) au chapitre précédent, l'énergie potentielle élastique interne du cheveu s'écrit [AP07] :

$$\mathcal{E}_e = \int_0^L \left(\frac{E I_1}{2} (\kappa_1(s) - \kappa_1^0)^2 + \frac{E I_2}{2} (\kappa_2(s) - \kappa_2^0)^2 + \frac{\mu J}{2} (\tau(s) - \tau^0)^2 \right) \mathrm{d}s \tag{6.4}$$

où E est le module d'Young (ou module d'*élasticité*) du cheveu, μ le coefficient de Poisson, I_1 (respectivement I_2) le moment d'inertie de la section de la tige par rapport à l'axe $\mathbf{n}_1$ (respectivement, par rapport à l'axe $\mathbf{n}_2$), et J le moment d'inertie axial de la tige. Ces moments d'inertie dépendent des rayons principaux de la section du cheveu, et donc du paramètre excentricité e. Leurs expressions exactes sont données au chapitre précédent, en Section 3.4.

L'énergie potentielle de pesanteur du cheveu $\mathcal{E}_g$ s'écrit classiquement

$$\mathcal{E}_g = \rho S g \int_0^L z(s)\, \mathrm{d}s, \tag{6.5}$$

où ρ est la masse volumique du cheveu, S l'aire de sa section (supposée constante le long du cheveu), $g = \|\mathbf{g}\|$ la norme du vecteur gravité et $z(s)$ la cote du point de la tige d'abscisse curviligne s.

D'après l'équation (6.4), l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_e$ d'un cheveu est minimale (et égale à zéro) lorsque les courbures et torsion κ_1, κ_2, τ de la tige sont égales à leur valeur spontanée κ_1^0, κ_2^0, τ^0. Cette tendance du cheveu à recouvrer sa forme naturelle est contrebalancée par l'effet de la gravité, représenté par $\mathcal{E}_g$, qui consiste à tirer le cheveu vers le bas. L'énergie potentielle totale du cheveu $\mathcal{E}_{hair}$ donnée par l'équation (6.3) est donc minimale lorsqu'il y a équilibre entre ces deux effets antagonistes.

1.2 Résolution numérique

Pour résoudre numériquement le problème posé, la tige est discrétisée grâce au modèle de Super-Hélice introduit à la Section 4.2 du chapitre précédent. En reprenant les mêmes notations, la tige est donc paramétrée par $3N$ coordonnées généralisées formées par les torsion et courbures matérielles $(\kappa_{[i,Q]})_{i=0,1,2}$ constantes sur chaque morceau de tige S_Q, avec $1 \leq Q \leq N$. Ces $3N$ paramètres sont regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mathrm{t}}\left(\tau_1, \kappa_{1,1}, \kappa_{2,1}, \cdots, \tau_Q, \kappa_{1,Q}, \kappa_{2,Q}, \cdots, \tau_N, \kappa_{1,N}, \kappa_{2,N}\right).$$

Comme le repère matériel d'encastrement $\boldsymbol{\mathcal{F}}(0)$ de la tige est imposé par la position et la direction d'encastrement dans le cuir chevelu, le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ définit une configuration unique pour la tige. En effet, on rappelle que le processus de reconstruction mentionné à la Section 4.2 et en Annexe D donne une expression analytique du repère matériel $\boldsymbol{\mathcal{F}}(s) = \{\mathbf{r}(s); (\mathbf{n}_i)_{i=0,1,2})\}$ le long de la tige, à partir des valeurs $(\kappa_{[i,Q]})_{i=0,1,2}$ sur chaque morceau S_Q de la tige (la courbe moyenne résultante est une hélice par morceaux).

Nous cherchons donc à trouver le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ qui minimise l'énergie $\mathcal{E}_{hair}$ de la tige. Une fois les coordonnées généralisées de la tige trouvées, il suffira de calculer la configuration correspondante de la tige, grâce au processus de reconstruction.

Calcul de l'énergie $\mathcal{E}_{hair}$

Le calcul de l'énergie totale du cheveu $\mathcal{E}_{hair}$ nécessite l'évaluation des deux termes $\mathcal{E}_g$ et $\mathcal{E}_e$, comme indiqué par l'équation (6.3).

Le calcul de l'énergie élastique $\mathcal{E}_e$ est direct, car l'équation (6.4) devient, après la modélisation de la tige comme une Super-Hélice :

$$\mathcal{E}_e^{\mathrm{SH}} = \sum_{Q=0}^{N} \left(\frac{EI_1}{2} (\kappa_{1,Q} - \kappa_{1,Q}^0)^2 + \frac{EI_2}{2} (\kappa_{2,Q} - \kappa_{2,Q}^0)^2 + \frac{\mu J}{2} (\tau_Q^i - \tau_Q^0)^2 \right) \frac{L}{N-1} \tag{6.6}$$

où L est la longueur de la tige. L'exposant SH dénote que l'énergie $\mathcal{E}_e$ est l'énergie élastique (exacte) se rapportant au modèle mécanique de Super-Hélice, dont le nombre de degrés de liberté est réduit par rapport au modèle de tige d'origine.

L'expression analytique de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}}$ à partir de l'équation (6.5) est plus difficile à formuler, car elle requiert l'intégration des équations cinématiques (5.9), afin de déterminer la fonction $z(s)$. En effet, $z(s) = (\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e_z})$ avec la condition initiale $z(0) = 0$ (par convention, on prend l'énergie potentielle nulle au niveau z de l'encastrement de la tige), où $\mathbf{e_z}$ est le vecteur du repère du monde (constant) orienté verticalement.

En écrivant $z(s)$ comme $z(s) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s')\,\mathrm{d}s'$, et en se rappelant que $\mathbf{r}(s)$ est lié au vecteur tangent $\mathbf{t}(s)$ par la relation cinématique $\mathbf{t}(s) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s)$, on obtient tout d'abord l'expression suivante pour $\mathcal{E}_g$:

$$\mathcal{E}_g = \rho S g \int_0^L (L - s') \, (\mathbf{t}(s') \cdot \mathbf{e_z}) \, \mathrm{d}s'. \tag{6.7}$$

Preuve :

Récrivons l'équation (6.5) en remplaçant $z(s)$ par l'expression $\int_0^s \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s')\,\mathrm{d}s'$:

$$\mathcal{E}_g = \int_0^L (\mathrm{d}m\, g\, z) = (\rho\, S\, g) \int_0^L z(s)\,\mathrm{d}s = (\rho\, S\, g) \int_0^L \left(\int_0^s \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s')\,\mathrm{d}s' \right) \mathrm{d}s.$$

Soit $f(s,s') = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s')$ la fonction à intégrer deux fois sur le domaine $\Delta = \{s' \in [0,s], s \in [0,L]\}$. La fonction f est continue et Δ est une partie bornée et fermée de $\mathcal{R}^2$ (surface triangulaire), telle que :

$$\left\{(s,s') \in \Delta\right\} = \left\{s' \in [0,s], s \in [0,L]\right\} = \left\{s \in [s',L], s' \in [0,L]\right\}.$$

Par le théorème de Fubini, on peut alors intégrer f sur le domaine Δ en choisissant n'importe quel ordre d'intégration. En échangeant l'ordre des intégrales dans l'expression précédente, on obtient donc :

$$\mathcal{E}_g = (\rho\, S\, g) \int_0^L \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s') \left(\int_{s'}^L \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s' = (\rho\, S\, g) \int_0^L \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s')\,(L-s')\,\mathrm{d}s' = (\rho\, S\, g) \int_0^L (L-s')\,(\mathbf{t}(s') \cdot \mathbf{e_z})\,\mathrm{d}s'.$$

□

Écrivons maintenant $\mathcal{E}_g$ à partir de l'équation (6.7), dans le cas d'une Super-Hélice :

$$\mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}} = \rho\, S\, g \int_0^L (L-s')\,(\mathbf{t}^{\mathrm{SH}}(s') \cdot \mathbf{e_z})\,\mathrm{d}s'.$$

L'expression analytique de $\mathbf{t}^{\mathrm{SH}}(s)$ le long de la tige est connue par le processus de reconstruction (voir Annexe D). Ramenons-nous à une somme d'intégrales sur chaque morceau S_Q de la tige :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}} &= \rho\, S\, g \sum_{Q=1}^{N} \left(\int_{S_Q} (L-s')\,(\mathbf{t}^{\mathrm{SH}}(s') \cdot \mathbf{e_z})\,\mathrm{d}s' \right) \\ &= \rho\, S\, g \sum_{Q=1}^{N} \left(\int_{s_{Q-1}}^{s_Q} (L-s')\,(\mathbf{t}^{\mathrm{SH}}(s') \cdot \mathbf{e_z})\,\mathrm{d}s' \right) \quad \text{en posant } S_Q = \{s \in [s_{Q-1}, s_Q]\}. \end{aligned}$$

Puis en faisant le changement de variable $s' = s_{Q-1} + u$ pour se ramener à une variable u locale à chaque morceau S_Q et en prenant les mêmes notations qu'en Annexe D :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}} &= \rho\, S\, g \sum_{Q=1}^{N} \left(\int_0^{\ell_Q} (L - s_{Q-1} - u)\,(\mathbf{t}_Q(u) \cdot \mathbf{e_z})\,\mathrm{d}u \right) \quad \text{avec } \ell_Q = s_Q - s_{Q-1} \\ &= \rho\, S\, g \sum_{Q=1}^{N} \underbrace{\left(\int_0^{\ell_Q} (L - s_{Q-1} - u)\,\mathbf{t}_Q(u)\,\mathrm{d}u \right)}_{\mathrm{I}(Q)} \cdot \mathbf{e_z}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

L'intégrale I_Q peut se calculer de manière analytique en fonction des coordonnées de $\mathbf{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_Q &= \int_0^{\ell_Q} (L - s_{Q-1})\,\mathbf{t}_Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\ell_Q} u\,\mathbf{t}_Q(u)\,\mathrm{d}u \\ &= (L - s_{Q-1})\,[\mathbf{r}_Q(u)]_0^{\ell_Q} - \int_0^{\ell_Q} u\,\mathbf{t}_Q(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{car} \quad \mathbf{t}(u) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} \\ &= (L - s_{Q-1})\,(\mathbf{r}_Q(\ell_Q) - \mathbf{r}_Q(0)) - \int_0^{\ell_Q} u\,\mathbf{t}_Q(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Puis en remplaçant $\mathbf{t}_Q(u)$ par son expression formelle donnée en Section 4.2 du chapitre précédent :

$$\mathrm{I}(Q) = (L - s_{Q-1})\,(\mathbf{r}_Q(\ell_Q) - \mathbf{r}_Q(0)) - \int_0^{\ell_Q} u \left(\frac{\tau_Q}{\Omega_Q}\,\mathbf{v}_{0,Q} + \frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\cos(\Omega_Q u)\,\mathbf{v}_{1,Q} + \frac{\kappa_Q}{\Omega_Q}\sin(\Omega_Q u)\,\mathbf{v}_{2,Q} \right) \mathrm{d}u.$$

Le terme intégral s'intègre facilement par parties, ce qui donne finalement, en posant $\varphi_Q = \Omega_Q \ell_Q$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(Q) = \quad & (L - s_{Q-1})\,(\mathbf{r}_Q(\ell_Q) - \mathbf{r}_Q(0)) \\ - \quad & \left(\frac{\tau_Q \ell^2}{2\Omega_Q}\,\mathbf{v}_{0,Q} + \frac{\kappa_Q \varphi_Q \sin\varphi_Q + \cos\varphi_Q - 1}{(\Omega_Q)^3}\,\mathbf{v}_{1,Q} + \frac{\kappa_Q \sin\varphi_Q - \varphi_Q \cos\varphi_Q}{(\Omega_Q)^3}\,\mathbf{v}_{2,Q} \right) \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}_Q(\ell_Q)$ s'exprime formellement par l'équation (5.19) en fonction de κ_Q, τ_Q et Ω_Q, avec $\kappa_Q = \sqrt{(\kappa_{1,Q})^2 + (\kappa_{2,Q})^2}$ et $\Omega_Q = \sqrt{(\tau_Q)^2 + (\kappa_Q)^2}$. La base adaptée $(\mathbf{v}_{\mathbf{i},Q})_{i=1,2,3}$ se construit également à partir des $(\kappa_{i,Q})_{i=1,2,3}$, comme indiqué par les équations (**??**).

L'énergie potentielle $\mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}}$ de la Super-Hélice s'exprime donc de manière analytique en fonction des coordonnées $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q=1..N}$ du vecteur $\boldsymbol{\kappa}$, de même que l'énergie élastique $\mathcal{E}_e^{\mathrm{SH}}$. Finalement, connaissant le vecteur d'état $\boldsymbol{\kappa}$, on peut calculer l'énergie totale du système de façon *exacte*, en faisant la somme des expressions (6.6) et (6.8).

Algorithme complet

Nous récapitulons ici l'algorithme utilisé pour calculer la forme à l'équilibre d'une Super-Hélice :

1. L'énergie du cheveu $\mathcal{E}_{hair}$ et le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ sont initialisés à des valeurs arbitraires.
2. Tant que l'énergie $\mathcal{E}_{hair}$ continue à décroître, on itère :
   - Calcul de l'énergie élastique $\mathcal{E}_e^{\mathrm{SH}}$ par l'équation (6.6).
   - Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}}$ par l'équation (6.8), qui découle du processus de reconstruction.
   - Minimisation de $\mathcal{E}_{hair}^{\mathrm{SH}} = \mathcal{E}_e^{\mathrm{SH}} + \mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}}$.
3. Connaissant le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ qui minimise $\mathcal{E}_{hair}^{\mathrm{SH}}$, on calcule la configuration finale $\boldsymbol{\mathcal{F}}(s)$, $s \in [0, L]$ de la tige, en utilisant le processus de reconstruction.

En pratique, on utilise la méthode de Fletcher et Powell [FP63] pour minimiser l'énergie potentielle de la tige. Cet algorithme ne requiert pas la connaissance *a priori* du gradient de la fonction à minimiser, il est de plus adapté à la recherche rapide de *minima* pour des fonctions non-linéaires.

1.3 Analyse et validation

Nous mettons ici en évidence les principaux paramètres d'entrée du modèle qui permettent de générer des formes réalistes de cheveu. Nous reportons également quelques résultats d'expériences visant à valider le modèle ; ces expériences, menées par Raphaël Eymery durant l'été 2005 dans les laboratoires de L'Oréal [Eym05], comparent de manière convaincante le comportement d'un cheveu réel à celui du cheveu simulé.

Influence de la frisure naturelle

La Figure 6.2 montre quelques configurations typiques pour le cheveu, obtenues par l'algorithme de minimisation d'énergie potentielle. À mesure que la courbure naturelle κ_1^0 (supposée ici constante le long de la tige) augmente, de plus en plus de boucles apparaissent. Des cheveux prenant la forme

de *boucles anglaises* - caractérisées par une forte frisure près des pointes et une frisure moindre près des racines - sont alors naturellement générés (cas c) et d)). Ce phénomène, que l'on retrouve couramment dans la réalité, est dû à l'influence de la gravité qui est plus importante près des racines (bord encastré) que près des pointes (bord libre), tandis que le terme élastique prédomine au contraire près des pointes.

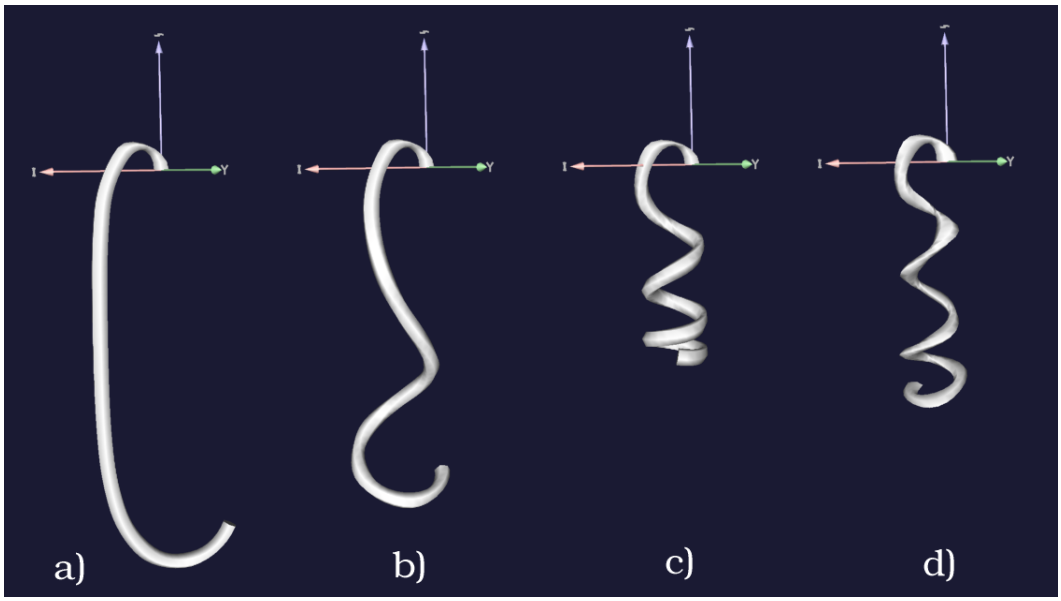


FIG. 6.2: *Simulation d'un cheveu bouclé. De a) à c) : augmentation de la courbure naturelle* κ_1^0 *de la tige, la section étant circulaire ; d) : tige ayant les mêmes courbures et torsion naturelles qu'en c), mais qui présente une section elliptique.*

Remarquons que lorsque l'on augmente l'excentricité e de la section de la tige (cas d)), tout en maintenant un rayon moyen constant, la régularité des boucles augmente le long de la tige[1]. En effet, lorsque l'on rend la section de la tige de plus en plus elliptique, cela conduit à un écart de valeurs diamétralement opposées des moments d'inertie I_1 and I_2 par rapport à leur valeur commune I obtenue pour une section ronde. Plus de boucles apparaissent parce que l'un des moments d'inertie augmente (*i.e.*, l'élasticité ou la raideur de la tige augmente dans une direction locale). Ce phénomène explique en partie pourquoi les cheveux elliptiques (de type africain par exemple) sont plus susceptibles d'être bouclés que ceux ayant une section circulaire (cheveux asiatiques).

Instabilités physiques

La méthode de résolution choisie permet également de rendre parfaitement compte des non-linéarités typiques du cheveu sous la gravité, comme par exemple son flambage, lorsque l'on augmente sa longueur - et donc sa charge - au-delà d'un certain seuil (instabilité modélisée pour la première fois par l'*elastica d'Euler*, présentée en Annexe B), ou bien l'instabilité en flexion-torsion due à l'augmentation d'une courbure naturelle. Ces deux instabilités sont mises en évidence sur les Figures 6.3 et 6.4.

[1]Ce phénomène de régularisation de boucles est encore plus remarquable lorsque l'on augmente la torsion naturelle τ^0 de la tige, mais conduit à une diminution du rayon apparent, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on augmente l'excentricité de la section. D'autre part, les seuls cheveux ayant dans la réalité une torsion naturelle non nulle sont ceux de type africain, donc ce paramètre ne saurait expliquer la forte frisure très régulière chez certains caucasiens. En revanche, les cheveux à section elliptique sont présents chez les deux groupes caucasien et africain.

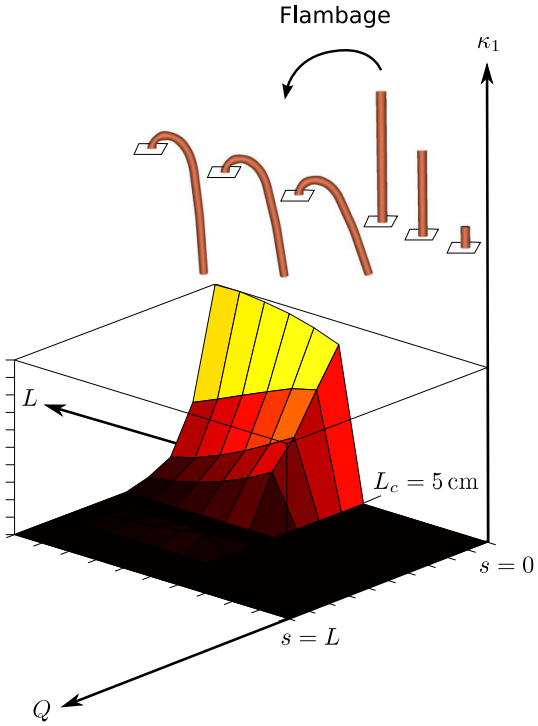


FIG. 6.3: *Mise en évidence du phénomène de flambage d'une tige de Kirchhoff lorsque sa longueur augmente.*

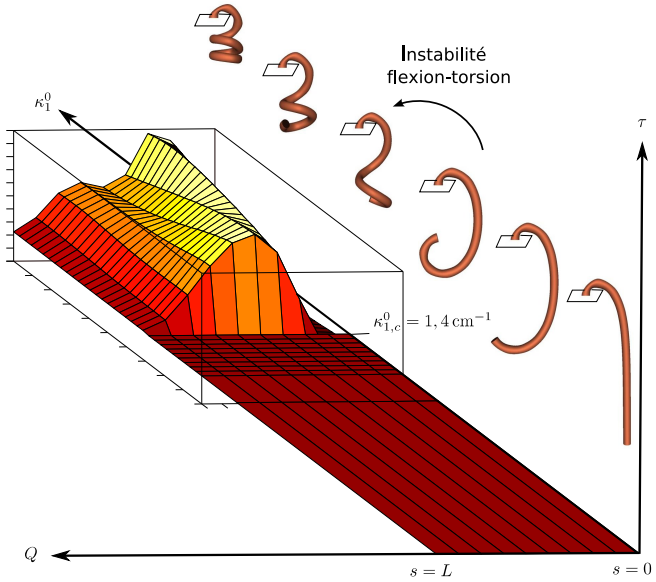


FIG. 6.4: *Mise en évidence de l'instabilité en flexion/torsion d'une tige de Kirchhoff lorsque l'une de ses courbures naturelles augmente.*

Remarquons que ces instabilités interviennent typiquement lorsque les équations de Kirchhoff admettent des solutions multiples. La méthode de minimisation d'énergie a l'avantage de converger directement vers une position d'équilibre stable. Nous avons testé la méthode itérative proposée de Pai [Pai02], mais celle-ci a, au contraire, beaucoup de mal à converger dans ces différents cas, ce qui la rend en pratique peu adaptée à la simulation de cheveux soumis à la gravité.

	Asiatique CH291100	**Caucasien D499**
Rayon (μm)	45	30
Excentricité	0	0
Masse volumique ($g \cdot cm^{-3}$)	1,32	1,32
Module d'Young (GPa)	3,7	0,8
Coefficient de Poisson	0,48	0,48

TAB. 6.1: *Caractéristiques des vrais échantillons de cheveux utilisés pour la validation du simulateur* `Hair3D` *[Eym05].*

Validation à partir d'expériences réelles

Le logiciel `Hair3D` résultant, conçu par Basile Audoly, a été validé en reproduisant des expériences réelles typiques et en comparant les résultats obtenus entre le réel et le virtuel. Cette phase de validation, dont nous reportons sur la Figure 6.5 quelques résultats, a été menée par Raphaël Eymery [Eym05] en été 2005 dans les Laboratoires de L'Oréal, toujours dans le cadre de la collaboration sur le cheveu.

Pour réaliser cette validation, tous les paramètres géométriques et physiques nécessaires à l'entrée de la simulation ont été mesurés sur les échantillons de vrais cheveux qui ont servi de comparaison (deux types de cheveux différents : un cheveu asiatique et un cheveu caucasien). Ces mesures sont reportées dans le tableau 6.1.

Les vrais cheveux ont ensuite été mis en forme artificiellement (par des bigoudis, dans le but de faciliter la comparaison en choisissant des courbures et torsion naturelles κ_i^0 constantes le long du cheveu), et l'on a extrait leurs courbures et torsion naturelles à partir de leur forme au repos (cheveux posés sur une table pour éviter l'action de la gravité).

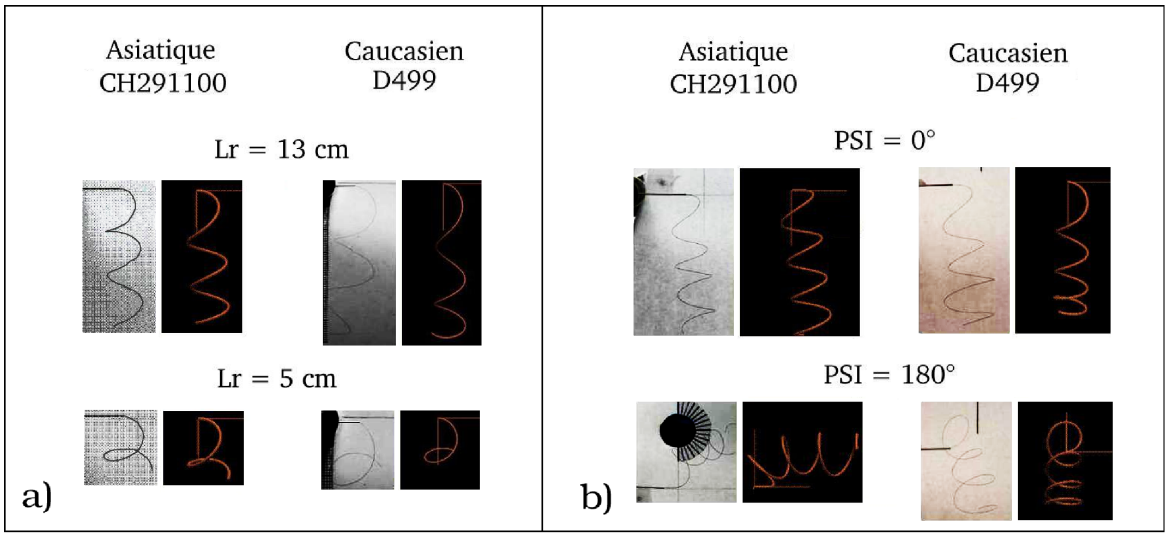


FIG. 6.5: *Exemples de validations expérimentales du modèle statique* `Hair3D`*, réalisées dans les laboratoires de L'Oréal par Raphaël Eymery en été 2005 [Eym05]. Comparaison d'un vrai cheveu et du cheveu simulé (répondant aux mêmes caractéristiques géométriques et physiques) lorsque l'on fait varier a) la longueur du cheveu, b) l'angle d'encastrement du cheveu par rapport à l'axe normal au plan de l'étude. Les comparaisons ont été effectuées pour deux types de cheveu différents (asiatique et caucasien), et montrent la fidélité avec laquelle le modèle de tige reproduit le comportement réel du cheveu.*

Stabilité et performances numériques

L'énergie potentielle de la Super-Hélice se calculant de manière exacte, l'évaluation des positions d'équilibre du système est robuste (aucune approximation en espace, contrairement à la méthode de Pai [Pai02]), et la stabilité de l'algorithme ne dépend pas du nombre N de morceaux choisis pour la discrétisation spatiale de la tige.

Examinons maintenant le coût de l'algorithme de minimisation d'énergie. La méthode de Fletcher et Powell [FP63] utilisée effectue une succession de minimisations monodimensionnelles (dans les directions conjuguées) pour chacun des $3N$ paramètres $\kappa_{i,Q}$ de l'énergie potentielle. Dans notre cas, la fonction à minimiser - l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{hair}^{\mathrm{SH}}$ - n'est pas exactement quadratique, et donc ce processus doit être itéré un certain nombre de fois avant que le minimum ne soit atteint. En pratique, on effectue de l'ordre de N itérations pour assurer la convergence, ce qui signifie que la méthode a une complexité algorithmique en $O(N^2)$.

Pour une longueur de cheveu maximum de $L = 50\,\mathrm{cm}$, nous avons jugé que $N = 10$ éléments étaient suffisants pour représenter la forme d'un cheveu de manière réaliste. Dans ce cas, la forme à l'équilibre d'une dizaine de cheveux peut être calculée en temps-réel, et une centaine en quelques secondes. Remarquons que la méthode de Pai est, malgré sa complexité linéaire, plus coûteuse (un seul fil simulé en temps-réel), car elle nécessite une discrétisation spatiale beaucoup plus fine de la tige (au moins 100 points pour un fil d'une vingtaine de centimètres). En effet, l'algorithme utilisé approxime les dérivées spatiales des équations par des différences finies, et donc le pas de discrétisation en espace doit être suffisamment petit pour limiter l'erreur d'approximation, et éviter la divergence du schéma numérique.

Les performances satisfaisantes que nous avons obtenues nous ont ainsi permis d'envisager l'utilisation du modèle de cheveu unique par minimisation d'énergie à plus grande échelle, pour la génération de coiffures naturelles complètes *via* une interface interactive.

2 Modélisation d'une coiffure complète

Il ne serait bien sûr pas raisonnable de simuler des dizaines de milliers de cheveux par la méthode précédente, car cela conduirait à des heures de calcul pour évaluer une seule configuration de la chevelure à l'équilibre. Ainsi, de même que les autres approches de modélisation de coiffure [CK05a], nous représentons une chevelure complète comme un ensemble de mèches. La forme générale de chaque mèche est gouvernée par un *cheveu directeur*, tandis que son apparence visuelle est donnée par un ensemble de cheveux individuels tracés à l'intérieur du volume de la mèche, à l'étape du rendu. L'algorithme de simulation statique d'un cheveu présenté à la section précédente est ici étendu pour permettre la prise en compte des contacts. C'est ce nouvel algorithme qui va servir à prédire de manière automatique la forme du cheveu directeur de chaque mèche. La géométrie des cheveux rendus est générée à partir de celle du cheveu directeur, par un processus stochastique similaire à celui utilisé dans [CK05a].

2.1 Plantation des cheveux et répartition en mèches

La première étape pour créer une chevelure consiste à définir une zone sur le crâne délimitant le cuir chevelu, puis à répartir un ensemble de mèches qui vont pousser sur le cuir chevelu.

Sélection du cuir chevelu

Contrairement à la plupart de approches précédentes qui spécifient la zone d'implémentation des cheveux sur une carte 2D représentant la mise à plat du maillage du personnage, notre logiciel permet à l'utilisateur de peindre directement le cuir chevelu sur le maillage en 3D (voir Figure 6.6).

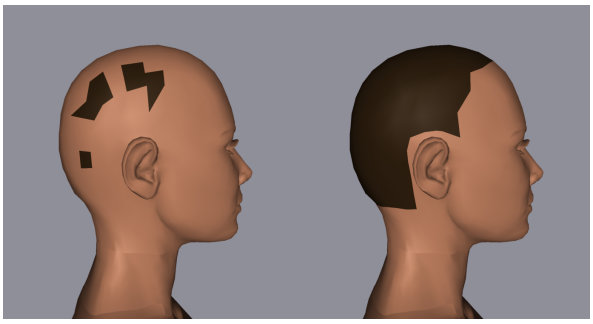


FIG. 6.6: *Sélection du cuir chevelu (en marron) sur un maillage 3D.*

Génération automatique des mèches

Une fois le cuir chevelu sélectionné, le partitionnement de cette surface en un certain nombre de mèches est effectué automatiquement. Pour cela, l'utilisateur choisit un entier n_w, correspondant approximativement au nombre de mèches souhaité pour la chevelure, et les racines des mèches sont alors générées grâce à l'algorithme suivant :

- *Distribution aléatoire de particules* : n_w particules sont positionnées aléatoirement sur la surface du cuir chevelu.
- *Répartition uniforme des particules* : les n_w particules sont considérées comme des charges électrostatiques ayant un effet répulsif sur les autres particules appartenant à leur voisinage. On utilise alors un algorithme itératif pour trouver la configuration à l'équilibre de l'ensemble des particules. Cela conduit à une répartition uniforme des particules sur le cuir chevelu. Notons que cette méthode est semblable à la première partie de l'algorithme de Turk [Tur92] pour le remaillage de surfaces gauches.
- *Triangulation régulière du cuir chevelu* : l'ensemble des n_w positions 3D résultantes des particules est alors tétraèdrisé en utilisant l'algorithme classique de Delaunay. Les arêtes indésirables et les tétraèdres plats sont supprimés par une passe de nettoyage, produisant finalement une triangulation régulière de la surface gauche du cuir chevelu. Cette triangulation a l'avantage de ne pas dépendre de la triangulation du maillage d'origine, mais seulement de la zone délimitant le cuir chevelu, et du nombre de particules initialement spécifié par l'utilisateur. Précisons cependant que cette méthode ne serait pas assez robuste pour gérer correctement des maillages d'objets fins, plats, ou pointus (pour lesquels il est recommandé d'utiliser un algorithme préservant la topologie, tel que celui présenté dans [Tur92]). Dans notre cas, le maillage considéré (cuir chevelu) est convexe et peu incurvé : il est convenablement traité par notre méthode.
- Chaque triangle généré par la triangulation sert à représenter la base de chaque mèche sur le cuir chevelu. Les racines des mèches sont donc adjacentes sur le crâne et ne se recouvrent pas. Le cheveu guide de chaque mèche est encastré au centre de gravité du triangle formant la base de la mèche.

Cet algorithme est illustré sur la Figure 6.7. Grâce à ce processus, l'utilisateur obtient rapidement et de manière automatique un modèle de chevelure composé d'environ n_w mèches de tailles à peu près égales, et réparties régulièrement sur le cuir chevelu.

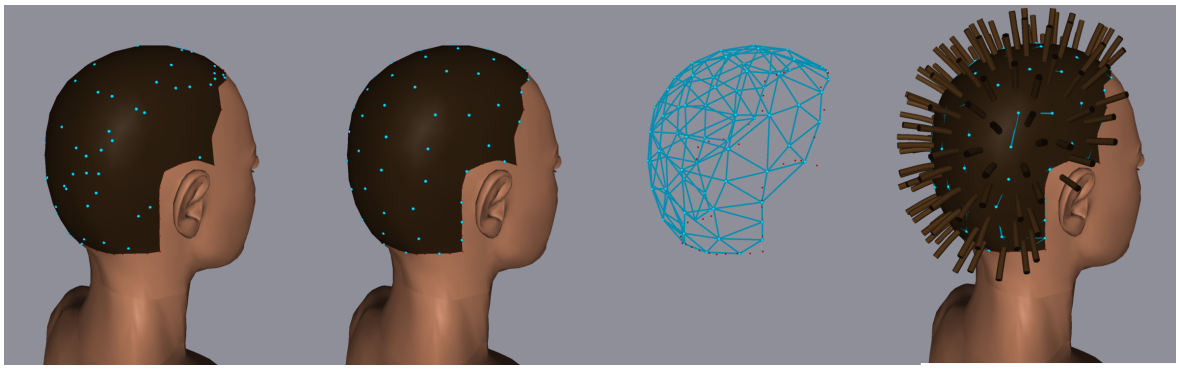


FIG. 6.7: *Génération automatique d'un modèle par mèches. De gauche à droite : une distribution aléatoire de particules (points bleus) sur le cuir chevelu ; répartition uniforme des particules sur la surface ; triangulation de l'ensemble de points 3D formés par les positions à l'équilibre des particules ; génération d'un cheveu directeur par triangle.*

Orientation des racines sur le cuir chevelu

Du fait de l'absence de données réelles sur les angles typiques d'encastrement des cheveux en fonction de la région du crâne et de l'individu considéré, nous avons pour l'instant simplifié la réalité en considérant que les cheveux poussent en angle droit par rapport à la surface du cuir chevelu. Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, cette hypothèse n'est en fait vraie que dans le cas des cheveux asiatiques. En effet, les cheveux caucasiens poussent de manière oblique par rapport au crâne, tandis que les cheveux africains poussent dans une direction pratiquement parallèle au cuir chevelu. Cependant, il semble que l'angle d'implantation des cheveux joue un rôle négligeable dans la forme finale prise par une chevelure, sauf dans le cas de cheveux courts caucasiens, où, comme nous l'avons vu sur la Figure 1.2, des motifs capillaires très visibles peuvent apparaître. Nous nous intéressons, dans le cadre de cette thèse, à la simulation de chevelures relativement longues, et donc nous ne chercherons pas ici à reproduire de tels motifs.

2.2 Gestion des contacts

Afin de créer des coiffures réalistes, il est nécessaire de tenir compte des interactions se produisant entre les mèches de cheveux, la tête et le corps du personnage, ainsi qu'au sein de la chevelure. Il est en particulier indispensable de traiter les contacts entre mèches si l'on veut que les coiffures générées aient un volume adéquat.

Pour les collisions, nous représentons chaque mèche w de manière simplifiée par un *squelette*, composé d'un nombre réduit de points d'échantillonnage s_w^i du cheveu directeur (en pratique, ce nombre est pris égal au nombre de morceaux composant le cheveu directeur), ainsi que d'une série d'épaisseurs r_w^i le long de la mèche, calculées en fonction de plusieurs facteurs tels que le nombre de cheveux composant la mèche et le niveau de frisure de la mèche. Le corps du personnage est approché par un ensemble de sphères qui servent à la fois pour la détection des collisions, et pour la réponse. Lorsqu'une collision se produit entre une mèche et une sphère du corps, nous appliquons au point de contact du squelette une force de pénalité élastique, notée F_c. L'avantage est qu'une telle force dérive d'une énergie potentielle, et donc pour tenir compte de sa contribution dans la simulation, il suffit d'ajouter son énergie correspondante $\mathcal{E}_c^{\mathrm{SH}}$ dans l'équation (6.3). Pour trouver la forme finale du cheveu directeur de la mèche en collision, le problème revient alors simplement à minimiser la nouvelle énergie $\mathcal{E}_{hair}^{\mathrm{SH}}$ définie ainsi :

$$\mathcal{E}_{hair}^{\mathrm{SH}} = \mathcal{E}_g^{\mathrm{SH}} + \mathcal{E}_e^{\mathrm{SH}} + \mathcal{E}_c^{\mathrm{SH}}.$$

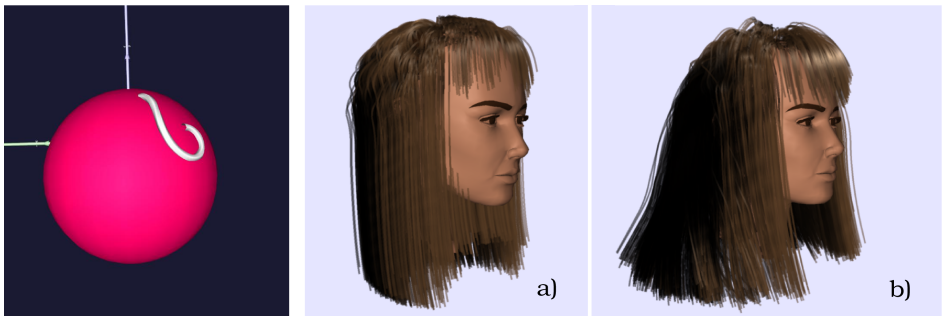


FIG. 6.8: *À gauche : collision entre un cheveu bouclé et une sphère. À droite : comparaison entre une chevelure complète sans collisions (a), et une chevelure pour laquelle l'ensemble des collisions (entre mèches, et entre les mèches et la tête), est correctement pris en compte (b). Remarquer en particulier la différence de volume entre les deux coiffures.*

En pratique, on évalue $\mathcal{E}_c^{\mathrm{SH}}$ en fonction de la distance x d'interpénétration entre la mèche et le corps : $\mathcal{E}_c^{\mathrm{SH}} = \frac{1}{2}kx^2$, où k est un paramètre de raideur choisi arbitrairement. Comme illustré sur la Figure 6.8 (à gauche), cette méthode, bien que très simple, simule les contacts entre un cheveu directeur et une sphère de manière satisfaisante.

Pour traiter les collisions entre mèches de manière efficace, nous nous sommes inspirés de l'algorithme des couches multiples d'enveloppes développé par Lee et Ko [LK01]. Le principe repose sur l'hypothèse suivante : les cheveux plantés haut sur le crâne doivent toujours recouvrir les cheveux plantés plus bas. L'idée consiste alors à créer une série d'enveloppes autour de la tête, en pelures d'oignon, et à détecter la collision de chaque cheveu avec l'enveloppe correspondant à l'altitude du cheveu (plus un cheveu est haut, plus on le teste avec une enveloppe grande). Cette méthode n'est autre que l'extension de l'algorithme de détection de collisions entre les cheveux et la tête. Bien sûr, elle ne marche que lorsque la tête reste statique et orientée verticalement, ce qui est notre cas pour cette modélisation statique de chevelure au repos. La Figure 6.8 (à droite, b)) montre qu'une chevelure complète présente un volume satisfaisant, grâce à cette approche.

2.3 Outils d'édition de coiffure

Cette partie décrit les outils de coiffure virtuelle dont dispose l'utilisateur pour créer des coiffures. Par rapport aux approches précédentes, notre méthode présente le grand avantage de simplifier la gestion des opérations classiques de coiffure telles que la coupe, le mouillage ou le séchage, grâce au modèle physique sous-jacent.

Mouillage et séchage

Dans la réalité, une coupe de cheveux intervient sur une chevelure mouillée. Pour coller ainsi le plus possible au réel, nous désirons simuler l'effet du mouillage avant d'appliquer la coupe. Si l'on veut simuler une chevelure mouillée pour des applications de coupe et de coiffure virtuelles, il est nécessaire de connaître les phénomènes physiques qui se produisent lorsque les cheveux sont en contact avec l'eau. Ceux-ci ont été décrits au Chapitre 1, et nous avons vu que l'absorption d'eau par le cheveu cause, entre autres, un changement important de ses propriétés mécaniques et géométriques : son diamètre augmente de 13% environ, sa longueur de 1%, et son module d'Young décroît d'un facteur 5 [BW05], rendant le cheveu beaucoup plus déformable. Enfin, une chevelure mouillée est beaucoup moins volumineuse qu'à sec, à cause de la nature cohésive de l'eau.

Ward *et al.* ont proposé un modèle de chevelure tenant compte de ces propriétés [WGL04]. Mais, comme leur modèle physique est très simple (chaînes masses-ressorts), et donc n'est pas paramétré par des quantités physiques adéquates, il leur faut contrôler de multiples structures pour arriver à appliquer sur la chevelure les changements physiques correspondant au passage à l'état mouillé.

Au contraire, grâce à notre approche basée sur un système mécanique réaliste, mouiller une chevelure revient simplement, du point de vue de la simulation, à modifier quelques paramètres physiques, et à changer les forces de collisions entre mèches. L'aspect visuel des mèches est également modifié pour un rendu plausible. Concrètement, notre algorithme de mouillage est le suivant :

- Le module d'élasticité des cheveux directeurs est divisé par 4, leur rayon augmenté de 13% et leur longueur de 1%. En pratique, c'est principalement le module d'élasticité qui a un fort impact sur la forme de la mèche.
- Nous diminuons le rayon de chaque mèche d'environ 40% (d'après nous, cela correspond de manière satisfaisante à la réalité). La distance d'interpénétration x dans le calcul des énergies de collision (voir Section 2.2) est réduite d'autant.
- Au niveau du rendu visuel, la couleur des cheveux fonce d'environ 20% et la diffusion de la lumière par les fibres est réduite (d'après les données expérimentales rapportées dans [BW05]).

Quant au séchage, nous considérons pour l'instant qu'il s'agit du processus inverse du mouillage, bien que ce ne soit pas tout à fait le cas dans la réalité [BW05]. Dans notre interface, un seul bouton intégrant l'ensemble de ces modifications permet à l'utilisateur de changer directement l'état de la chevelure (mouillée ou sèche).



FIG. 6.9: *Mouillage (b), sélection par l'utilisateur des mèches pour la coupe (c), coupe finale (d) et séchage (e) d'une chevelure naturellement bouclée (a). Noter la différence de forme des mèches entre l'état mouillé et l'état sec (a-b ou d-e), causée en particulier par le changement du module d'élasticité entre les deux états. On observe également, à sec, que les mèches (sur la frange notamment) ont changé de forme du fait de la coupe : les boucles ont "remonté", comme dans la réalité.*

Coupe de cheveux

Nous considérons, pour simplifier, que la coupe de cheveux consiste à enlever la matière de la chevelure qui est située en-dessous d'un plan horizontal $z = z_c$. Au lieu de calculer exactement l'intersection entre le plan de coupe et chaque mèche pour en déduire la longueur finale de la mèche après la coupe, nous faisons l'approximation suivante : la longueur finale d'une mèche coupée peut être approchée par $z_r - z_c$ où z_r est la cote de la racine de la mèche considérée. Cette approximation est raisonnable si l'on effectue la coupe sur des cheveux mouillés (donc verticaux et assez "droits"), et elle est d'autant plus correcte que les cheveux à couper sont longs (l'erreur d'approximation étant la plus importante près de la racine).

Notons que, contrairement aux approches précédentes, notre méthode de coupe est *physique* (*i.e.* la chevelure perd effectivement de la masse), et non pas purement géométrique. Ainsi, la forme de chaque boucle de la chevelure, ainsi que le volume global de cette dernière sont affectés par une coupe, comme dans la réalité (voir Figure 6.9).

2.4 Rendu d'une chevelure

Pour visualiser la chevelure complète de manière réaliste, il est essentiel de pouvoir générer un grand ensemble de cheveux individuels autour des cheveux guide, et d'en contrôler le tracer avec précision. Il est utile, également, de disposer d'un logiciel de rendu à deux niveaux : un rendu convaincant mais peu coûteux, durant la modélisation de la coiffure, afin de guider l'utilisateur le plus précisément possible ; et un rendu très précis pour la visualisation finale de la coiffure créée.



FIG. 6.10: *Comparaisons entre le réel et le virtuel, sur deux exemples de mèches bouclées.*

Géométrie des cheveux individuels

On suppose d'une part que la densité de cheveux est uniforme sur le cuir chevelu, ce qui est généralement le cas dans la réalité (sauf pour les cas d'alopécie qui ne sont pas considérés ici). Ainsi, le nombre de cheveux appartenant à une mèche donnée est choisi proportionnellement à la surface du triangle sur le cuir chevelu délimitant la base de la mèche. De plus, les racines des cheveux sont distribuées uniformément dans la surface triangulaire.

D'autre part, on choisit de répartir les positions radiales des cheveux non-guide suivant une distribution gaussienne autour du cheveu guide. Cette distribution radiale est contrôlée par un paramètre de variance, noté σ_{rad}. Pour assurer une transition continue et visuellement satisfaisante entre les positions des cheveux non-guide le long de la mèche et leurs racines, uniformément réparties sur le cuir chevelu, nous procédons ainsi :

- Les positions de référence des cheveux tracés sont multipliées par un scalaire de manière à être à l'intérieur du cercle inscrit au triangle formant la base de la mèche, ce qui définit ainsi des racines temporaires pour les cheveux tracés.
- Ces racines temporaires sont ensuite distribuées uniformément à l'intérieur du triangle, par la même technique de répartition de particules électrostatiques expliquée en Section 2.1. Ainsi, les racines des cheveux sont bien distribuées uniformément sur la surface du cuir chevelu.

La courbe moyenne de chaque cheveu guide, ainsi que les repères matériels associés, sont connus de manière analytique en tout point s le long du cheveu, et on peut donc s'appuyer sur un échantillonnage quelconque (fin ou grossier) du cheveu guide pour tracer les cheveux non-simulés autour de ce cheveu. En pratique, nous choisissons un pas d'échantillonnage $\delta s = 1$ cm pour un rendu intermédiaire, et $\delta s = 3$ mm pour le rendu final.

Dans notre rendu à base de mèches distinctes, chaque cheveu non-simulé est tracé par *décalage* (*offset*) à partir du cheveu guide. La distance entre le cheveu guide et le cheveu non-simulé est déterminée, de la racine à la pointe, grâce à la fonction radiale donnée par la distribution aléatoire évoquée plus haut. Le décalage est calculé le long du cheveu guide comme un vecteur dans le plan de sa section locale $(\mathbf{n_1}(s_j), \mathbf{n_2}(s_j))$, où s_j est un point d'échantillonnage du cheveu guide.

Illumination et ombrage des cheveux

Au cours de la modélisation de coiffure, le rendu des cheveux est effectué interactivement par la méthode de Kajiya et Kay [KK89], pour l'illumination locale et par notre algorithme [BMC05] pour le calcul de l'auto-ombrage. Pour le rendu final d'une coiffure, l'illumination locale des cheveux est calculée de manière plus précise par l'algorithme de Marschner *et al.* [MJC+03]. En particulier, ce modèle tient compte des effets visuels dus à la géométrie elliptique de la section d'un cheveu. Ainsi, l'excentricité e représente un paramètre unique de simulation, utilisé à la fois par le modèle mécanique et pour le rendu. La valeur de ce paramètre est fixée en fonction du type de cheveu considéré : pour les cheveux asiatiques, e est pratiquement nul, tandis que pour les cheveux caucasiens, e varie entre 0 et 0,5, et pour les cheveux africains, e varie entre 0,4 et 0,6. Les modifications des paramètres de rendu effectuées pour simuler une chevelure mouillée ont été détaillées en Section 2.3.

3 Résultats et validation

3.1 Pousse de cheveux

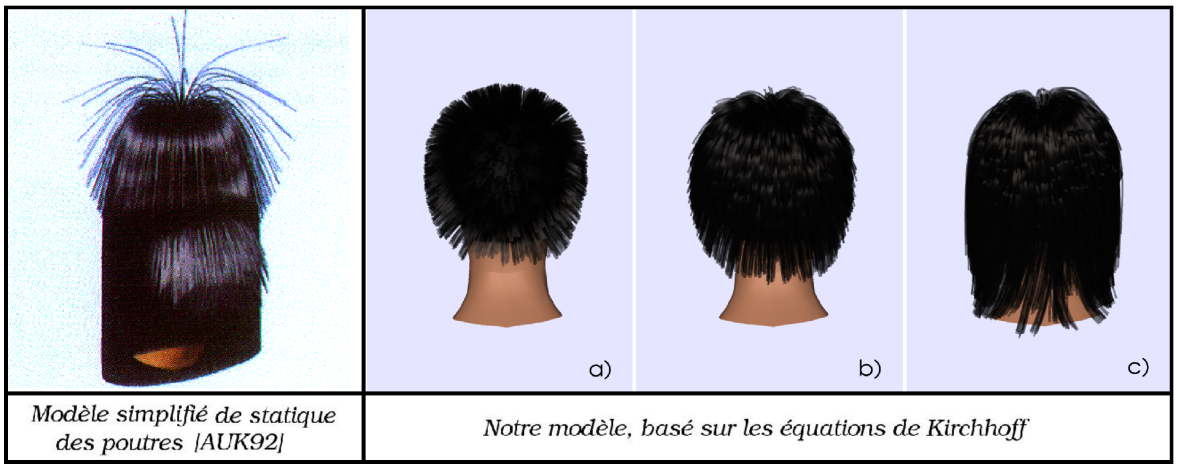


FIG. 6.11: *Comparaison du phénomène de pousse des cheveux entre le modèle simplifié de statique des poutres utilisé par Anjyo et al. [AUK92] (à gauche) et notre modèle basé sur les équations de Kirchhoff pour les tiges élastiques (à droite). Dans le premier cas, la gravité seule ne suffit pas à faire tomber les cheveux correctement sur la tête, et des forces supplémentaires devront être ajoutées par la suite pour obtenir une coiffure réaliste. Dans le second cas, le modèle non linéaire que nous utilisons reproduit parfaitement le phénomène se produisant lors de la pousse de cheveux : les cheveux poussent d'abord tout droit (a), puis ayant atteint une longueur seuil (b), ils se plient naturellement sous leur propre poids (b et c).*

Contrairement aux nombreuses approches pseudo-physiques qui utilisent des champs de vecteurs dans l'espace 3D pour déterminer la forme statique des cheveux [HMT00, Yu01, CK05a], notre méthode se sert des caractéristiques physiques des cheveux (longueur, masse volumique, module d'Young, etc.) pour calculer automatiquement la forme de la chevelure sous l'effet de la gravité. La méthode d'Anjyo *et al.* [AUK92], qui s'est inspirée des travaux en résistance des matériaux sur la statique des poutres, suit un peu la même idée : dans cette approche, les cheveux se courbent naturellement sous l'effet de leur propre poids. Cependant, la méthode employée est très simplifiée (elle se base sur une équation de déformation linéaire), et n'est applicable en théorie que pour les petites perturbations (*i.e.*, les petites déformations et petits déplacements). Utilisée telle quelle, elle donne des

résultats peu réalistes (voir Figure 6.11), et pour générer des coiffures plausibles elle requiert l'ajout de forces autres que la gravité (appelées forces "coiffantes").

Au contraire, notre méthode permet de tenir compte correctement du phénomène de pousse d'un cheveu, caractérisé par le fait que, au-delà d'une certaine longueur, un cheveu même parfaitement vertical cesse de pousser droit, et plie sous l'effet de son propre poids : c'est le phénomène d'instabilité que nous avons déjà mis en évidence en Section 1.3 et sur la Figure 6.3.

3.2 Génération de formes naturelles de chevelure

La Figure 6.12 expose quelques résultats de coiffures que nous avons réalisées en nous inspirant de chevelures réelles, de formes diverses. Au moment de la réalisation de ce travail, nous ne disposions pas des valeurs précises des paramètres géométriques et physiques des cheveux mesurés à partir de chaque chevelure réelle. Nous avons alors choisi de fixer les paramètres d'entrée de la simulation en utilisant les valeurs moyennes classiques données dans les ouvrages spécialisés sur le cheveu [Rob02, BW05] : $E = 1\,\text{GPa}\,;\,\mu = 0,3\,;\,\rho = 1,3\,\text{g/cm}^3$.

Nous avons ajusté le degré de frisure grâce à l'une des deux courbures naturelles (et en fixant la seconde à zéro). De plus, ayant remarqué à la Section 1.3 que l'excentricité de la section de la tige avait un impact sur la régularité des boucles le long de la tige, nous avons joué sur ce paramètre pour obtenir différentes formes de boucles. Ainsi, sur la Figure 6.12, pour obtenir la frisure de type anglaise de la coiffure en b), nous avons fixé ce paramètre à une valeur nulle. En revanche, nous avons choisi une valeur non nulle de ce paramètre (proche de $0,1$) pour obtenir la frisure régulière des racines aux pointes de la coiffure en c).

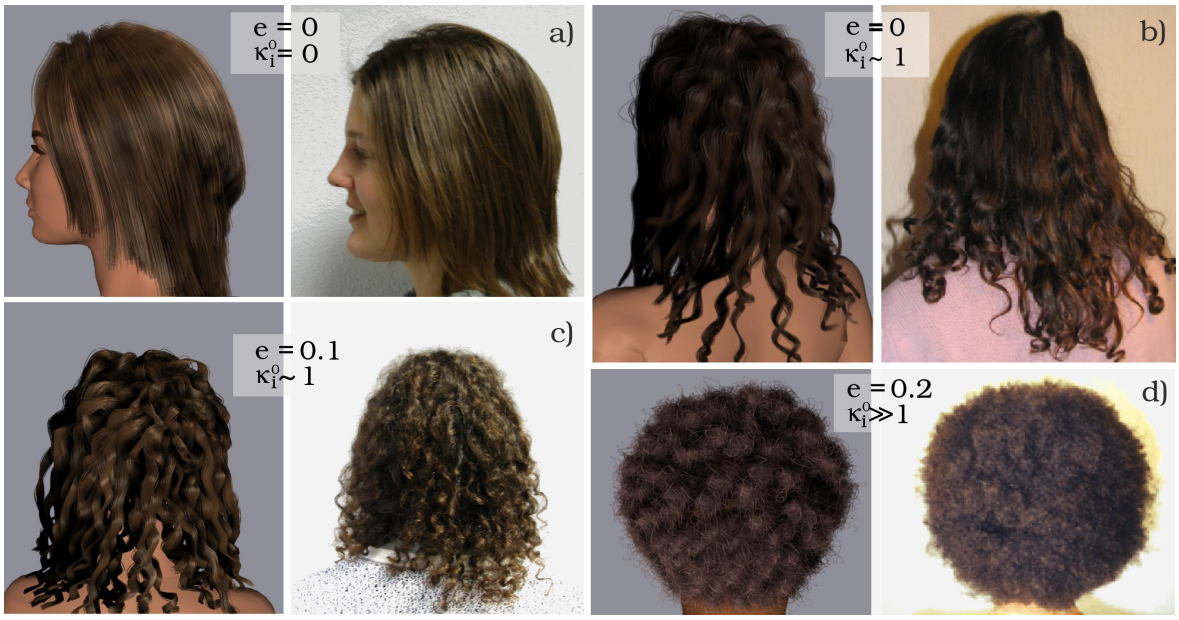


FIG. 6.12: *Comparaison entre des coiffures générées par notre logiciel et des coiffures réelles. À droite de chaque couple d'images : images réelles de cheveux (a) raides, (b et c) bouclés et (d) crépus. À gauche : résultats synthétiques correspondants, générés à partir de valeurs adéquates pour l'excentricité de la section du cheveu e et pour les courbures naturelles κ_i^0. Chacune des coiffures de synthèse a été réalisée à l'aide de notre logiciel en moins de 30 minutes.*

Afin de vérifier que nos prédictions sur la valeur approximative du paramètre *e* étaient justifiées pour chacune des chevelures (b) et (c) de la Figure 6.12, nous avons demandé à L'Oréal une analyse au vidéo-microscope des échantillons de cheveux appartenant à chacune de ces deux chevelures. Ces

analyses ont révélé que les cheveux en c) présentent effectivement une section elliptique, tandis que les cheveux en b) ont une section plutôt ronde (voir Figure 6.13). Cette validation a donc confirmé en partie nos hypothèses, à savoir que la forme elliptique de la section d'un cheveu bouclé influe sur la régularité longitudinale de sa frisure.

Cependant, d'autres études plus approfondies seraient nécessaires pour conclure sur l'influence réelle de la géométrie de la section du cheveu relativement à l'influence de ses courbures naturelles. En particulier, nous avons fait l'hypothèse, dans nos expérimentations, que les courbures naturelles étaient constantes le long du cheveu (bien que ce ne soit pas une restriction du modèle), ce qui n'est pas forcément le cas dans la réalité. Toutefois, il demeure très difficile d'avoir une estimation précise des variations de frisure naturelle le long de la tige.

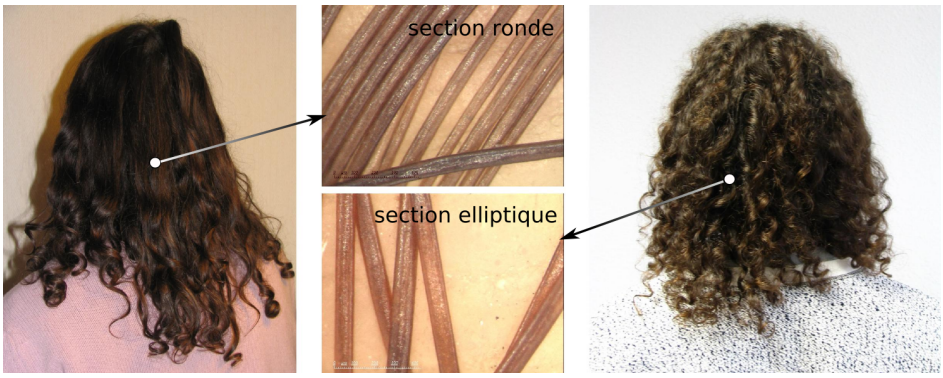


FIG. 6.13: *Grossissement au vidéo-microscope des chevelures en b) et c) de la Figure 6.12. Comme prédit par notre modèle, les cheveux de la chevelure en b) (ici à gauche) ont une section ronde, tandis que les cheveux de la chevelure en c) (à droite) ont une section ronde à elliptique.*

4 Bilan

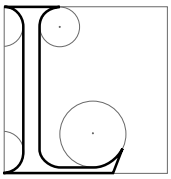
Nous avons présenté une nouvelle méthode permettant de calculer automatiquement la géométrie d'une chevelure naturelle à partir des caractéristiques structurelles, physiques et ethniques du cheveu. Notre approche s'appuie sur un modèle robuste et validé simulant la statique des tiges de Kirchhoff. Comme le montrent nos résultats, cette approche permet de générer des formes de chevelures variées et fidèles à la réalité.

Actuellement, notre méthode est principalement limitée par le coût en temps de calcul nécessaire pour générer la configuration à l'équilibre d'une chevelure complète (6 secondes en moyenne sont nécessaires pour calculer une configuration à l'équilibre d'une chevelure telle que celles qui sont présentées sur la Figure 6.12). La limitation des performances de l'application nous empêche d'utiliser plus d'une centaine de cheveux directeurs dans notre système de modélisation de coiffure. Cependant, les résultats obtenus sont visuellement très satisfaisants avec ce nombre limité de cheveux directeurs, grâce à notre modèle procédural de mèche.

Nous envisageons d'étudier actuellement la prise en compte de l'angle d'encastrement des cheveux dans le cuir chevelu pour générer la forme finale d'une chevelure. En effet, l'implantation des cheveux a un impact assez important sur la forme d'une chevelure, surtout lorsque celle-ci est courte. Nous souhaiterions en outre intégrer au modèle quelques caractéristiques artificielles (raies par exemple) pour obtenir des styles de coiffure plus variés.

CHAPITRE 7

Simulation dynamique de chevelures



E MODÈLE statique de chevelures, présenté au chapitre précédent, a démontré sa puissance de représentation et a permis de manipuler interactivement des chevelures de types très variés, dont la forme est contrôlée à partir d'un nombre réduit de paramètres intuitifs. Cependant, il n'est pas possible d'étendre cette approche pour prendre en compte le mouvement dynamique des cheveux, car la méthode de résolution par minimisation d'énergie potentielle s'applique exclusivement au cas statique (recherche d'états d'équilibre). Pour traiter le cas dynamique, il faut résoudre les équations dynamiques des tiges, ce qui s'avère beaucoup plus complexe.

Une partie importante de la collaboration autour de la modélisation des cheveux a donc été consacrée à la recherche d'un modèle stable pour la simulation du mouvement des tiges de Kirchhoff. Ce travail de modélisation mécanique a été confié à Basile Audoly. J'ai quant-à-moi participé à l'implémentation, au test et à la validation des divers modèles successifs qui ont pu être proposés au cours de cette recherche. Outre cette aide à la mise au point du modèle mécanique, mes contributions ont porté sur le passage de l'animation d'un cheveu unique et isolé à celui d'une chevelure complète, en interaction avec elle-même et avec le corps du personnage. Pour cela, j'ai proposé des méthodes efficaces pour la détection de collisions et mis en place des forces de réponse dont j'ai identifié les paramètres en me référant à des expériences réelles. J'ai aussi proposé une ébauche de paramétrisation du comportement collectif des cheveux, qui m'a conduit à concevoir un habillage géométrique des cheveux guide jetant un pont entre la représentation par mèches distinctes et l'interpolation d'une chevelure continue.

1 Méthodologie suivie

La première approche pour concevoir un modèle dynamique de cheveu a consisté, très naturellement, à utiliser les équations dynamiques de Kirchhoff et à les discrétiser, en espace et en temps, grâce à un schéma de différences finies. Cependant, ce premier modèle s'est finalement avéré très instable, notamment à cause de l'approximation faite sur les termes dérivés en espace. Ce constat nous a conduit à proposer un second modèle dynamique de tige, basé sur la représentation en Super-Hélice introduite au Chapitre 5 et sur les principes de la dynamique de Lagrange. Une première implémentation en 2D de ce modèle nous a permis de vérifier que sa stabilité était satisfaisante. Cette méthode a ensuite été étendue avec succès en 3D, pour donner le modèle de *Super-Hélice dynamique*. Comme nous le verrons, ce modèle garantit la simulation réaliste et stable d'un cheveu unique, tout en tolérant de grands pas de temps.

Parallèlement à l'implémentation partielle et à l'évaluation des différents modèles dynamiques conçus pour un cheveu unique, j'ai développé plusieurs algorithmes permettant de prendre en compte les effets collectifs des cheveux, et ainsi de passer du modèle dynamique de cheveu unique à la dynamique d'une chevelure complète. Ces algorithmes, gérant notamment les interactions entre cheveux, les collisions entre les cheveux et le corps du personnage, ainsi que la génération de la géométrie de la chevelure à partir d'un ensemble restreint de cheveux guide, ont été conçus et implémentés de la manière la plus générale possible, de façon à pouvoir s'interfacer avec tout modèle mécanique de cheveu en cours d'étude et prêt au test. J'ai ainsi développé au fur et à mesure une plate-forme d'animation dynamique, permettant de tester efficacement chaque modèle mécanique de cheveu en cours, individuellement ou bien au sein d'une chevelure complète. Cette plate-forme de test nous a permis, au cours de nos recherches, de détecter rapidement les forces et les faiblesses des différents modèles mécaniques implémentés, ces derniers constituant la brique de base de la simulation d'une chevelure complète.

Finalement, une part importante des mes travaux a consisté à valider le modèle physique de cheveux dynamiques, à partir d'expériences réelles. Le modèle final de cheveu couplé aux interactions a été validé grâce à une série d'expériences sur la mèche, et par des comparaisons avec des mèches réelles. Poussant le réalisme physique plus loin que les méthodes précédentes, notre modèle est au final capable de capturer précisément le comportement non-linéaire des cheveux en mouvement, ainsi que la dynamique de cheveux bouclés. Comme l'illustrent nos résultats finaux, notre méthode permet de reproduire les effets subtils se produisant au sein d'une chevelure en mouvement.

Le travail qui est présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'une présentation et d'une publication à la conférence ACM SIGGRAPH, en août 2006 [BAC+06].



FIG. 7.1: *À gauche : une Super-Hélice. Au centre et à droite : simulation dynamique d'une chevelure ondulée, bouclée et lisse. Ces chevelures ont été animés en utilisant une centaine de cheveux guide, chaque cheveu guide étant une Super-Hélice composée de $N = 5$ éléments hélicoïdaux.*

En Section 2, nous présentons brièvement le premier modèle dynamique de tige qui a été élaboré, et nous montrons en quoi les problèmes de convergence que nous avons rencontrés en testant ce

modèle sont en fait inhérents à la méthode de discrétisation spatiale par des différences finies - appelée dans la suite méthode *nodale*. Nous montrons ensuite, en Section 3, comment la modélisation des tiges par des Super-Hélices permet de développer une méthode numérique stable, affranchie de toute approximation numérique en espace. Enfin, en Section 4, nous exposons le modèle de chevelure dynamique complète construit à partir du modèle mécanique de cheveu, avant de valider en Section 5 le modèle mécanique et le modèle d'interactions, grâce à une série de comparaisons visuelles entre des cheveux réels et virtuels en mouvement.

Précisons que les principes et équations définissant le modèle dynamique de Super-Hélice, mis au point par Basile Audoly, sont très complexes. J'ai tâché de les retranscrire ici de la manière la plus simple possible, en donnant les éléments principaux à la compréhension pour un non-spécialiste de la mécanique. Ainsi j'ai jugé inutile de mentionner tous les calculs (parfois très lourds) qui ont été nécessaires notamment pour l'élaboration du modèle dynamique de Super-Hélice.

2 Échec de l'approche nodale

La première idée que nous avons eue pour implémenter les équations de Kirchhoff dynamiques a consisté à utiliser un schéma de différences finies à la fois en espace en temps. Dans un tel modèle, la tige est échantillonnée en N nœuds $(s_P)_{P=1,\dots,N}$. Dans les équations de Kirchhoff (5.9) à (5.16), données au Chapitre 5, toutes les dérivées en espace sont *approchées* par des différences finies. Cette méthode mène à un système d'équations décrivant l'évolution temporelle des trois degrés de liberté (torsion et courbures $(\kappa_{i,P}(t))_{i=0,1,2}$) en chaque nœud s_P.

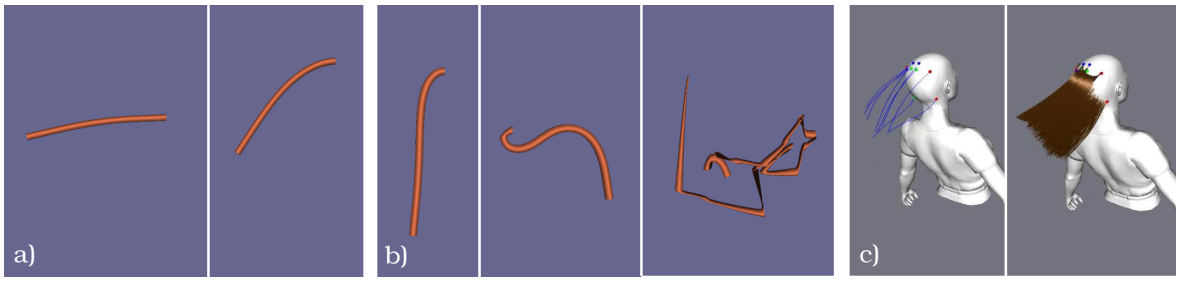


FIG. 7.2: *Instabilités de l'approche nodale : oscillations verticales d'une tige de Kirchhoff de 12 cm simulée par la méthode des différences finies proposée par Hou et al. [HKS98], (a) en l'absence de gravité (stable) et (b) en présence de gravité (divergence). (c) Tentative de simulation d'une chevelure complète animée grâce à quelques cheveux guide, animés comme des tiges de Kirchhoff discrétisées par différences finies ; étant donné que le modèle nodal de tige ne supporte pas les fortes courbures, il n'est pas possible avec ce modèle de planter les cheveux verticalement sur le crâne, ni de simuler des cheveux bouclés, ni encore d'imposer des mouvements rapides à la chevelure !...*

Nous avons testé ce schéma numérique dans diverses configurations (voir Figures 7.2 et 7.3), et nous avons constaté qu'il était fondamentalement instable[1], en particulier dans le cas de longs cheveux qui, à cause de leur poids, présentent des courbures assez marquées près du cuir chevelu (voir Figure 7.2). Ces instabilités numériques sont dues aux non-linéarités spatiales dans les équations de Kirchhoff, qui empêchent l'utilisation d'un schéma temporel entièrement implicite, et à la présence de dérivées spatiales d'ordre très élevé dans les équations du mouvement, ce qui impose des très fortes contraintes de stabilité sur les schémas d'intégration en temps explicites, $\Delta t \leq \Delta t_{\max} =$

[1] La simulation d'un cheveu raide de 10 cm soumis à la gravité était instable, même en poussant la discrétisation spatiale jusqu'à plusieurs centaines de nœuds, et pour des petits pas de temps de 10^{-5} sec.

$O(1/N^2)$ [HKS98]. Ainsi, les équations de Kirchhoff mènent à des problèmes numériques raides dont il est très difficile, voire impossible, de se défaire *via* les méthodes nodales de discrétisation.

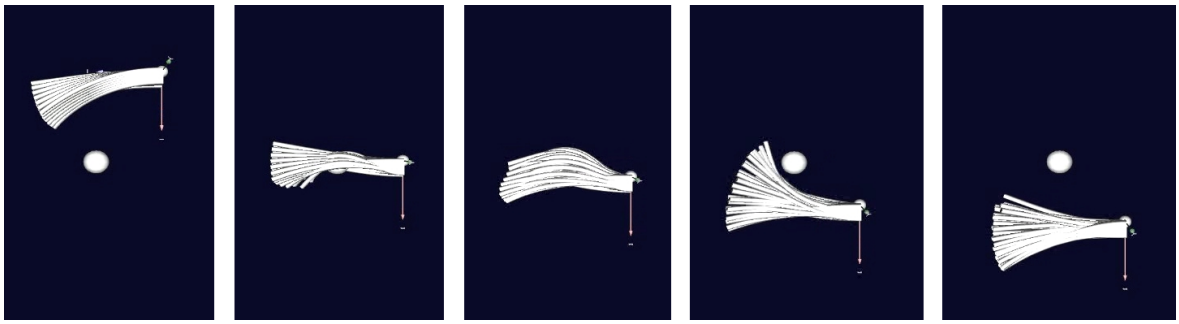


FIG. 7.3: *Simulation de la collision (par des forces de pénalité) entre des tiges de Kirchhoff, simulées par l'approche nodale, et une sphère, en l'absence de gravité. Lorsque les déformations des tiges ne sont pas trop importantes (comme c'est le cas ici), cette méthode fonctionne de manière stable. Cependant, dès qu'on souhaite simuler de plus grandes déformations en courbures et en torsion, d'importantes instabilités numériques apparaissent (voir Figure 7.2, à droite).*

Les problèmes raides dans les méthodes nodales ont déjà fait l'objet d'analyses approfondies par Baraff et Witkin [BW92] qui recommandent l'utilisation de *modèles lagrangiens déformables* (parfois appelés "modèles globaux", par opposition aux modèles locaux ou nodaux), comme nous l'avons vu au Chapitre 2. De tels modèles sont construits tout d'abord en choisissant avec soin les degrés de liberté que l'on cherche à animer, puis en considérant ces degrés de liberté comme les coordonnées généralisées dans les équations dynamiques de Lagrange. C'est l'approche que nous utilisons ici, dans le même esprit que [WW90, BW92, QT96].

3 Super-Hélices dynamiques

Après une dizaine de mois passés à implémenter et à tester le modèle dynamique de tige par différences finies, nous avons compris que les instabilités numériques rencontrées étaient causées par les approximations effectuées sur les termes dérivés en espace des équations : le problème était donc inhérent à la méthode. Nous avons ainsi renoncé à discrétiser les équations du modèle continu de Kirchhoff, et avons choisi à la place de considérer la dynamique d'un nouveau modèle, déjà discret en espace : le modèle de Super-Hélice. Ce modèle a déjà été introduit au Chapitre 5 et exploité avec succès en statique, au chapitre précédent. Pour l'utiliser en animation, toute la difficulté a consisté à écrire les équations dynamiques de ce nouveau système mécanique à partir des équations de Kirchhoff. Ce difficile travail a pu être réalisé grâce aux précieuses compétences de Basile Audoly en modélisation mécanique.

Avant de se lancer dans le cas dynamique 3D, un premier modèle en 2D a été conçu et testé, afin de vérifier la viabilité du modèle de Super-Hélice en dynamique (dans le cas 2D, il faudrait en l'occurrence parler d'un modèle de 'Super-Cercle'). Les résultats encourageants que nous avons obtenus avec ce premier modèle nous ont conduit rapidement à passer à l'approche 3D. C'est cette dernière approche que nous introduisons ici.

Étant donnée la grande complexité du modèle dynamique de Super-Hélice, nous proposons ici d'en présenter seulement une vue d'ensemble, afin d'aider le lecteur à visualiser rapidement le modèle et à comprendre les grandes lignes de la méthode. Les détails des calculs, jugés moins utiles à la compréhension globale de l'approche, ne sont pas donnés par souci de clarté dans l'exposition de la méthode.

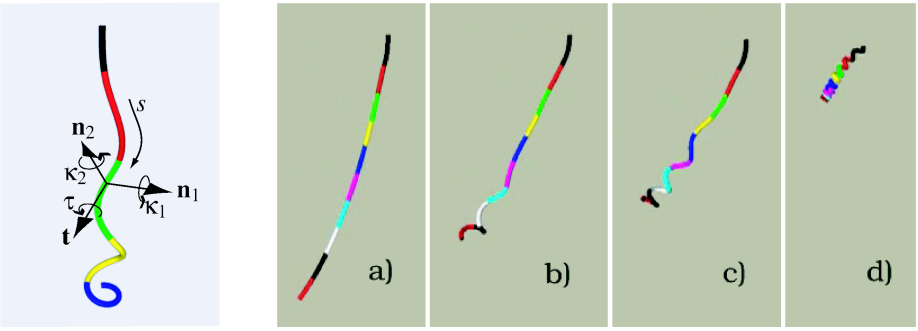


FIG. 7.4: *À gauche : géométrie d'une Super-Hélice. À droite : quatre Super-Hélices caractérisées par des courbures et torsion naturelles différentes, et animées par le même mouvement d'oscillation horizontale : cheveu a) raide, b) ondulé, c) bouclé, et d) très bouclé. Dans cet exemple, chaque cheveu est simulé à l'aide de 10 éléments hélicoïdaux, chaque élément étant représenté d'une couleur différente.*

3.1 Paramètres indépendants

Au Chapitre 5, nous avons introduit la Super-Hélice comme un modèle de tige de Kirchhoff ayant un nombre fini de degrés de liberté, les $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q\in[1..N]}$, qui représentent les coordonnées généralisées de notre système. Le modèle dynamique que nous construisons à partir de cette représentation a le grand avantage d'être capable de prendre en compte une discrétisation spatiale de la tige arbitrairement grossière (pour $N \geq 1$ petit), ou fine (N grand). En réglant ce paramètre $N \geq 1$ pendant la simulation, on pourra ainsi choisir le meilleur compromis entre précision et efficacité, en fonction de la complexité du mouvement de la chevelure, ou de la puissance de calcul disponible. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné à la fin du Chapitre 5, les contraintes de la tige sont déjà intégrées à travers cette paramétrisation en courbures et torsion. Comme nous le verrons, ce choix permettra de garantir une simulation très stable du modèle pour n'importe quelle valeur de N, et autorisera les grands pas de temps.

3.2 Équations dynamiques pour une Super-Hélice

Étant donné un corps déformable dont la configuration dérive de coordonnées généralisées $\mathbf{q}(t)$, la mécanique de Lagrange fournit, comme expliqué en Annexe C, une méthode systématique pour formuler les équations du mouvement de ce corps, $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Dans notre cas, les équations de Lagrange nous donnent $3N$ équations scalaires qui s'écrivent :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\kappa}_{i,Q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \kappa_{i,Q}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{i,Q}} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\kappa}_{i,Q}} = \int_0^L \mathbf{J}_{iQ}(s,\mathbf{q},t)\cdot\mathbf{F}(s,t)\,\mathrm{d}s \tag{7.1}$$

où $\mathcal{T}(\boldsymbol{\kappa}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}, t)$ est l'énergie cinétique de la Super-Hélice, $\mathcal{U}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ son énergie interne élastique, et $\mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}, t)$ sa dissipation interne. Les expressions de chacun de ces termes sont données plus bas. Le membre de droite de l'équation (7.1) est la force généralisée $f_{i,Q}$ qui dérive de la densité linéique $\mathbf{F}(s,t)$ de la force physique appliquée sur la tige (voir Annexe C pour une définition de la force généralisée), et $\mathbf{J}_{i,Q}$ dénote la matrice Jacobienne de $\mathbf{r}$, $\mathbf{J}_{i,Q} = \partial \mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)/\partial\kappa_{i,Q}$.

Nous prenons en compte trois types de forces extérieures : le poids du cheveu, la traînée visqueuse de l'air ambiant (supposée constante le long du cheveu) avec le coefficient de frottement ν, et les forces de contact $\mathbf{F}^{\mathrm{c}}$ avec les autres cheveux et le corps du personnage :

$$\mathbf{F}(s,t) = \rho S\mathbf{g} - \nu\frac{\partial \mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)}{\partial t} + \mathbf{F}^{\mathrm{c}}(s,t). \tag{7.2a}$$

Le calcul de la résultante $\mathbf{F}^{\mathrm{c}}$ des forces de contact est expliqué à la Section 4.2.

Les trois énergies dans les équations du mouvement (7.1) qui sont importantes pour une tige élastique sont :

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa},t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}s \tag{7.2b}$$

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{1}{2}\int_0^L \sum_{i=0}^{2} (EI)_i \left(\kappa_i^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa}) - \kappa_i^{\mathrm{n}}(s)\right)^2 \mathrm{d}s \tag{7.2c}$$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t) = \frac{1}{2}\int_0^L \mu \sum_{i=0}^{2} (EI)_i \left(\frac{\mathrm{d}\kappa_i^{\mathrm{SH}}(s,\boldsymbol{\kappa})}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{7.2d}$$

Remarquons que l'énergie cinétique $\mathcal{T}$ s'exprime de manière classique en fonction de la vitesse de la tige, $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$. L'énergie élastique $\mathcal{U}$ dans l'équation (7.2c) se déduit du calcul de l'énergie stockée dans la tige, en fonction de la loi de comportement du matériau (5.13) donnée au Chapitre 5. L'énergie de dissipation $\mathcal{D}$ que nous proposons se base sur un modèle heuristique simple, qui permet de capturer les effets visco-élastiques dans les cheveux.

Tous les termes nécessaires à l'équation (7.1) ont été donnés dans les équations (7.2). En combinant toutes ces équations, on arrive à des équations explicites du mouvement exprimées en fonction des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\kappa}(t)$:

$$\mathbb{M}[s,\boldsymbol{\kappa}]\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}} + \mu\mathbb{K}\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbb{K}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}^0) = \mathbf{A}[t,\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}}] + \int_0^L \mathbf{J}_{iQ}[s,\boldsymbol{\kappa},t]\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{i}}(s,t)\,\mathrm{d}s. \tag{7.3}$$

Dans cette équation, la notation entre crochets signifie que toutes les fonctions concernées sont données par des formules explicites en fonction de leurs arguments. En réalité, le calcul de ces termes est, dans le cas des équations de Kirchhoff, difficile. Il requiert en particulier le calcul de l'accélération de la tige $\ddot{\mathbf{r}}^{\mathrm{SH}}(s,t)$, qui intervient sous forme intégrale dans le terme dérivé de l'énergie cinétique $\mathcal{T}$ des équations de Lagrange (7.1). C'est précisément ce terme qui dépend linéairement de l'accélération $\ddot{\boldsymbol{\kappa}}$ en courbures et en torsion de la tige, et dont va notamment découler la valeur de la matrice $\mathbb{M}$. La Section 3.3 donne des indications concernant le calcul explicite en espace de $\ddot{\mathbf{r}}^{\mathrm{SH}}(s,t)$.

Dans l'équation (7.3), la matrice d'inertie $\mathbb{M}$ est une matrice carrée et pleine, de taille $3N$ (où N est le nombre d'éléments hélicoïdaux de la Super-Hélice), qui dépend non-linéairement de $\boldsymbol{\kappa}$. Les $3N$ lignes de $\mathbb{M}$ correspondent aux $3N$ équations fournies par (7.1) pour $i = 0,1,2$ et $1 \le Q \le N$. La matrice de raideur $\mathbb{K}$ est également une matrice carrée de taille $3N$, qui contient, pour chaque élément S_Q, les raideurs (supposées constantes) en torsion et en courbures de la tige. Le vecteur $\boldsymbol{\kappa}^0$ définit la configuration au repos de la tige, et contient les torsion et courbures naturelles $\kappa_{i,Q}^0$ sur chaque élément S_Q de la Super-Hélice. Enfin, le vecteur $\mathbf{A}$ représente tous les termes restants (comprenant la traînée visqueuse de l'air), qui sont indépendants de $\ddot{\boldsymbol{\kappa}}$ et qui dépendent non-linéairement de $\boldsymbol{\kappa}$ et $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$.

Finalement, l'équation vectorielle (7.3) est la version discrète, pour une Super-Hélice, des équations de Kirchhoff dynamiques données au Chapitre 5.

3.3 Calcul formel des termes cinématiques à chaque pas de temps

Nous avons vu, dans la première méthode proposée en Section 2, que les instabilités du modèle étaient principalement dues aux erreurs d'approximation en espace de la tige. Tout l'intérêt de notre modèle de Super-Hélice est de traiter au mieux (*i.e.* de manière *exacte*) les termes dérivés par rapport à s, qui requièrent classiquement une approximation en espace (*via* un schéma de discrétisation) pour leur évaluation numérique. Nous nous affranchissons ici de l'utilisation d'un schéma numérique

en espace, et intégrons *analytiquement* toutes les quantités cinématiques qui interviennent dans le modèle. Ceci est rendu possible grâce à la modélisation de la tige par un ensemble d'éléments ayant chacun des courbures et une torsion constantes : cela nous permet en effet, grâce au choix judicieux d'une base adaptée à chaque élément (donnée en Annexe D), de calculer *de manière analytique* tous les termes cinématiques, et notamment l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}$ de la tige, qui intervient dans les équations de Lagrange après dérivation de l'énergie cinétique $\mathcal{T}$. Cela signifie :

- Que toutes les quantités cinématiques intermédiaires sur un élément donné S_Q avec $u \in [0, \ell_Q]$, où ℓ_Q est la longueur de l'élément S_Q, ont une expression explicite en fonction de u (et non pas en fonction de termes dérivés par rapport à u) : c'est ce qu'on appellera la cinématique sous forme intégrée de la tige.
- Qu'il existe un mécanisme de propagation le long de la tige des termes cinématiques depuis le bord encastré jusqu'au bord libre (toutes les quantités cinématiques sont connues au point d'encastrement de la tige, et on impose des conditions de continuité en position, en vitesse et en accélération à la jonction entre deux éléments).

Cette méthode, très puissante, recourt cependant à des calculs symboliques lourds : c'est le prix à payer pour obtenir tous les termes cinématiques sous leur forme intégrée. Cependant, la quasi-totalité des calculs peut être effectuée au moyen d'un logiciel de calcul formel tel que Mathematica [Res05], et c'est en pratique ce qui a été fait pour obtenir de manière plus directe les résultats de calculs dont nous avions besoin.

Sans entrer dans les détails, donnons les grandes lignes du calcul analytique de $\ddot{\mathbf{r}}^{\mathrm{SH}}(s,t)$ le long de la Super-Hélice. Nous nous intéressons tout d'abord au calcul symbolique de $\ddot{\mathbf{r}}_Q(u,t)$ sur un seul élément S_Q (Q est fixé). L'expression formelle de $\mathbf{r}_Q(u,t)$ est donnée par le processus de reconstruction (voir Chapitre 5 ou Annexe D). Cette expression dépend (non-linéairement) des $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}$, et de $\mathbf{r}_Q(0,t)$. Si on la dérive deux fois, on obtient l'expression analytique de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}_Q(u,t)$ sur l'élément S_Q, qui s'écrit formellement comme une fonction *affine* des trois accélérations $(\ddot{\kappa}_{i,Q})_{i=0,1,2}$:

$$\ddot{\mathbf{r}}_Q(u,t) = \ddot{\mathbf{r}}_Q^*(u,t) + \sum_{i=0,1,2} \frac{\delta \ddot{\mathbf{r}}_Q}{\delta \ddot{\kappa}_{i,Q}} \ddot{\kappa}_{i,Q}.$$

Dans le membre de droite, le deuxième terme regroupe tous les termes qui dépendent linéairement des $(\ddot{\kappa}_{i,Q})_i$, et le premier terme regroupe les termes restants, qui dépendent (non-linéairement) des trois vitesses $(\dot{\kappa}_{i,Q})_i$ et des trois positions $(\kappa_{i,Q})_i$. Ce premier terme $\ddot{\mathbf{r}}_Q^*$ fait également intervenir l'accélération de l'élément en $u=0$, $\ddot{\mathbf{r}}_Q(0,t)$, et l'accélération en rotation du repère matériel, $\dot{\mathbf{\Lambda}}_Q(0,t)$. Par continuité à la jonction entre les éléments S_{Q-1} et S_Q de la tige, ces deux termes se déduisent, respectivement, à partir des valeurs des fonctions $\ddot{\mathbf{r}}_{Q-1}(u,t)$ et $\dot{\mathbf{\Lambda}}_{Q-1}(u,t)$ sur l'élément S_{Q-1} en $u=\ell_{Q-1}$, où ℓ_{Q-1} est la longueur de l'élément S_{Q-1}. Nous avons vu que sur l'élément S_Q, la fonction $\ddot{\mathbf{r}}_Q(u,t)$ dépend de manière affine des $(\ddot{\kappa}_{i,Q})_i$. Donc sur l'élément S_{Q-1}, la fonction $\ddot{\mathbf{r}}_{Q-1}(u,t)$ dépend de manière affine des $(\ddot{\kappa}_{i,Q-1})_i$. On peut montrer, de même, que la fonction $\dot{\mathbf{\Lambda}}_Q(u,t)$ dépend de manière affine des $(\ddot{\kappa}_{i,Q})_i$. Ainsi, en propageant ces deux fonctions le long de la tige depuis l'extrémité encastrée ($s=0$) jusqu'à l'élément courant S_Q, on en déduit que $\ddot{\mathbf{r}}_Q(u,t)$ dépend de manière affine des $3\,Q$ accélérations $(\ddot{\kappa}_{i,j})_{i=0,1,2}^{j\in[1..Q]}$.

Finalement, l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}^{\mathrm{SH}}(s,t)$ le long de la tige est une fonction affine de *toutes* les accélérations en torsion et en courbures $(\ddot{\kappa}_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q\in[1..N]}$, et on peut connaître son expression exacte grâce à la propagation le long de la tige des fonctions cinématiques locales à chaque élément S_Q, du bord encastré vers le bord libre. L'accélération inconnue $\ddot{\boldsymbol{\kappa}}$ qui sort des équations de Lagrange et apparaît dans l'équation finale (7.3) provient de ce terme d'accélération de la Super-Hélice, $\ddot{\mathbf{r}}^{\mathrm{SH}}(s,t)$.

3.4 Discrétisation en temps

Grâce au formalisme de Lagrange, nous avons pu écrire les équations dynamiques se rapportant au modèle de Super-Hélice, intrinsèquement discret en espace. Comme nous l'avons vu, notre méthode de résolution n'introduit, par rapport au modèle, aucune approximation en espace dans les équations. Il reste maintenant à proposer un schéma numérique d'intégration en temps pour résoudre nos équations dynamiques (7.3). Nous avons choisi d'utiliser un schéma de Newton semi-implicite, avec un pas de temps constant. Les deux termes $\ddot{\boldsymbol{\kappa}}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ dans le membre de droite des équations du mouvement sont calculés de manière implicite, de manière à accroître la stabilité de la résolution.

Équations discrètes

En notant $\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}$ et $\mathbf{y} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}$, on a une évolution dynamique sur le vecteur formé par la réunion de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{y} \\ \mathbb{M}\dot{\mathbf{y}} + \mu\mathbb{K}\mathbf{y} + \mathbb{K}\mathbf{x} &= \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbb{K}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

où l'on a posé $\mathbf{I} = \int_0^L \mathbf{J}_{iQ}[s,\boldsymbol{\kappa},t]\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{i}}(s,t)\,\mathrm{d}s$. En notant ε le pas de temps constant choisi pour l'intégration numérique, le schéma de Newton semi-implicite d'ordre un fournit les équations :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}_{t+1}-\mathbf{x}_t}{\varepsilon} - \mathbf{y}_{t+1} &= 0 \\ \mathbb{M}\,\frac{\mathbf{y}_{t+1}-\mathbf{y}_t}{\varepsilon} + \mu\mathbb{K}\mathbf{y}_{t+1} + \mathbb{K}\mathbf{x}_{t+1} &= (\mathbf{A}+\mathbf{I})_t + \mathbb{K}\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Notons que l'on a calculé les termes $\mathbf{y}_{t+1}$ de manière implicite dans la première équation, et $\mathbb{K}\mathbf{x}_{t+1}$ dans la seconde. Ce calcul implicite sera la clef du succès de la méthode, comme précisé plus bas. Les équations étant d'ordre deux en temps, chaque pas de temps nécessite la résolution d'un système linéaire de taille $6N$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\varepsilon\mathbf{1} \\ \varepsilon\mathbb{K} & \mathbb{M}+\varepsilon\mu\mathbb{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{y}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbb{M}\mathbf{y}_t + \varepsilon\left([\mathbf{A}+\mathbf{I}]_t + \mathbb{K}\mathbf{x}_0\right) \end{pmatrix}.$$

On peut éliminer $\mathbf{y}$ en fonction de $\mathbf{x}$ pour ne plus avoir à résoudre qu'un système de taille $3N\times 3N$ et non plus $6N\times 6N$. L'élimination est très simple :

$$\mathbf{y}_{t+1} = \frac{\mathbf{x}_{t+1}-\mathbf{x}_t}{\varepsilon},$$

et donne le système réduit :

$$\left(\mathbb{M}+\varepsilon\mu\mathbb{K}+\varepsilon^2\,\mathbb{K}\right)\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{M}(\mathbf{x}_t+\varepsilon\,\mathbf{y}_t) + \varepsilon\mu\mathbb{K}\mathbf{x}_t + \varepsilon^2\left([\mathbf{A}+\mathbf{I}]_t + \mathbb{K}\mathbf{x}_0\right)$$

Pour une meilleure précision, il est utile de rechercher les incréments $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t+1}-\mathbf{x}_t$ et $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}_{t+1}-\mathbf{y}_t$. En fonction de ces incréments, le système linéaire complet se récrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\varepsilon\mathbf{1} \\ \varepsilon\mathbb{K} & \mathbb{M}+\varepsilon\mu\mathbb{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta\mathbf{x}}{\varepsilon} \\ \frac{\Delta\mathbf{y}}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ -\mathbb{K}\mathbf{x}_t - \mu\mathbb{K}\mathbf{y}_t + [\mathbf{A}+\mathbf{I}]_t + \mathbb{K}\mathbf{x}_0 \end{pmatrix}.$$

L'élimination se fait par :

$$\Delta\mathbf{y} = -\mathbf{y}_t + \frac{\Delta\mathbf{x}}{\varepsilon}.$$

Le système réduit devient :

$$(\mathbb{M}+\varepsilon\mu\mathbb{K}+\varepsilon^2\,\mathbb{K})\left(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)=[\mathbb{M}\mathbf{y}-\varepsilon\mathbb{K}\mathbf{x}+\varepsilon([\mathbf{A}+\mathbf{I}]+\mathbb{K}\mathbf{x}_0)]_t\,.$$

On peut préférer éliminer $\Delta\mathbf{x}$ dans les équations. Il faut alors résoudre le système équivalent pour $\Delta\mathbf{y}$, à chaque pas de temps :

$$(\mathbb{M}+\varepsilon\mu\mathbb{K}+\varepsilon^2\,\mathbb{K})\,\frac{\Delta\mathbf{y}}{\varepsilon}=([\mathbf{A}+\mathbf{I}]-\mathbb{K}(\mathbf{x}+(\varepsilon+\mu)\,\mathbf{y}-\mathbf{x}_0))_t.$$

On incrémente alors $\mathbf{x}$ selon :

$$\Delta\mathbf{x}=\varepsilon\,(\mathbf{y}_t+\Delta\mathbf{y})\,.$$

La matrice de ce système linéaire est carrée et pleine (comme $\mathbb{M}$), et nous utilisons un algorithme de gradient conjugué pour résoudre le système. Le fait que $\mathbb{M}$ soit pleine est le prix à payer pour incorporer la contrainte d'inextensibilité dans la paramétrisation. En effet, comme nous l'avons brièvement vu dans la Section précédente, l'intégration des équations cinématiques produit des termes qui dépendent de toutes les accélérations en courbures et en torsion le long de la tige, et pas seulement des accélérations locales à l'élément considéré. Cependant, comme nous le verrons dans la suite, la densité de $\mathbb{M}$ n'est pas vraiment un problème, puisqu'un bon niveau de réalisme sera obtenu pour un N assez petit. Typiquement, nous utiliserons pour nos animations de chevelures complètes $N=5$ morceaux pour chaque Super-Hélice simulée.

Contraintes cachées

La matrice $\mathbb{M}$ est dégénérée aux deux tiers, c'est-à-dire qu'elle n'est que de rang $2N$ alors qu'elle est de taille $3N$. Cela se comprend facilement en revenant au cas continu : l'équation de Kirchhoff pour les moments, $\mathbf{M}_{,s}+\mathbf{t}\wedge\mathbf{T}=\mathbf{0}$, donne, une fois projetée sur $\mathbf{t}$, $\mathbf{M}_{,s}\cdot\mathbf{t}=0$, soit $(\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})_{,s}-(\Omega\wedge\mathbf{t})\cdot\mathbf{M}$ d'où :

$$\frac{\mathrm{d}(\mu J\,(\tau(s)-\tau^0(s))}{\mathrm{d}s}=M_1\,\kappa_2-M_2\,\kappa_1. \tag{7.4}$$

Cette équation est accompagnée de la condition au bord :

$$[\mu J\,(\tau(s)-\tau^0(s))]=\mathbf{M}_L\cdot\mathbf{t}_L$$

où le membre de droite désigne l'effort de torsion appliqué en $s=L$, qui est nul si ce bord est libre. Si on n'avait pas approximé le moment d'inertie de la section à zéro, on aurait eu dans l'équation(7.4) un terme supplémentaire proportionnel à l'accélération en rotation, donc à $\ddot{\tau}$. Ce terme est absent, ce qui correspond physiquement à choisir une vitesse infinie de propagation pour les modes de torsion. Ces équations ne sont donc pas des équations différentielles, mais des équations qui permettent d'exprimer les torsions directement en fonction des courbures, ce qui signifie que les $(\kappa_{i,Q})_{i=0,1,2}^{Q\in[1..N]}$ ne sont pas vraiment des paramètres indépendants pour le système.

Cependant, le fait que $\mathbb{M}$ ne soit pas inversible n'est pas si grave puisque l'on adopte un schéma « suffisamment » implicite. Par conséquent, la matrice à inverser à chaque pas de temps n'est pas $\mathbb{M}$, mais $\mathbb{M}+(\varepsilon\mu+\varepsilon^2)\,\mathbb{K}$ qui redevient définie positive dès que $\varepsilon>0$. On pourra donc ignorer ces contraintes cachées pour l'instant.

Dans la suite, on utilise le modèle de Super-Hélice pour animer des cheveux guide, qui définissent le mouvement global de la chevelure.

4 Modélisation d'une assemblée de cheveux

4.1 Simulation par cheveux guide

L'animation réaliste d'une chevelure à partir d'une centaine de cheveux directeurs est rendue possible grâce à la cohérence locale des cheveux voisins au cours du mouvement. Comme les approches précédentes, notre modèle vise à reproduire le comportement collectif des cheveux en calculant de manière appropriée des forces d'interaction entre les différents cheveux simulés (Super-Hélices), et en générant des cheveux supplémentaires à l'étape de rendu. Dans la suite, nous expliquons brièvement comment les interactions entre cheveux guide sont traitées, avant de proposer un nouvel algorithme permettant de générer la géométrie de tous les cheveux à partir de l'ensemble des cheveux guide, sans avoir à choisir *a priori* entre une représentation continue de la chevelure et une représentation par mèches disjointes.

4.2 Interactions

Pour simuler une chevelure complète en mouvement, il est nécessaire de disposer d'un algorithme efficace pour traiter les collisions entre cheveux et entre les cheveux et le corps. La détection est calculée de manière efficace en exploitant la cohérence temporelle du mouvement des cheveux, comme dans [RCFC03]. Nous évitons ainsi le coût quadratique pour le calcul des cheveux les plus proches en gardant et en mettant à jour à chaque pas de temps des paires de points les plus proches. Comme dans [CCK05], les contacts entre volumes de cheveux sont traités par des forces de pénalité dissipatives.

Détection

Pour permettre une détection à la fois efficace et précise des collisions pouvant se produire entre les mèches guidées par des Super-Hélices, notre stratégie se base sur les deux idées suivantes : a) l'utilisation d'enveloppes englobantes cylindriques *adaptatives* autour des mèches, dont le nombre et la taille s'adaptent automatiquement au cours du temps au degré d'enroulement en hélice de la mèche, et b) le *suivi*, à chaque pas de temps, *des paires de points les plus proches* entre les squelettes (*i.e.* les axes principaux) des cylindres englobants.

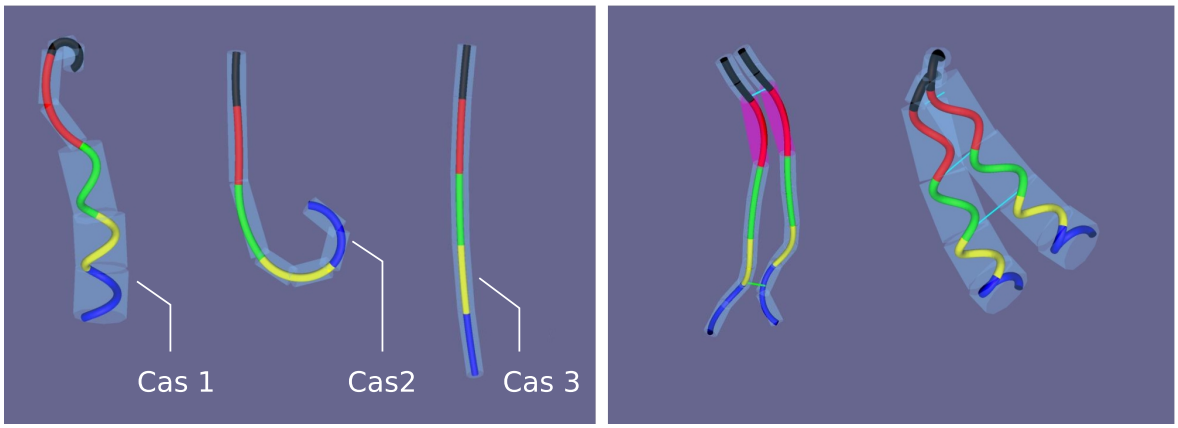


FIG. 7.5: *À gauche : les différentes représentations adaptatives pour le volume englobant d'un morceau de mèche correspondant à un élément du cheveu guide de la mèche. À droite : le suivi de points les plus proches entre deux squelettes de volumes guide (cheveux lisses et bouclés).*

a) Enveloppes englobantes cylindriques adaptatives

Le volume englobant un élément S_Q du cheveu guide (de courbe moyenne hélicoïdale), pourra être composé d'un unique cylindre englobant la forme hélicoïdale du cheveu guide, dans le cas où les spires de l'hélice sont suffisamment nombreuses et resserrées (cas 1 sur la Figure 7.5), ou, à défaut, de plusieurs cylindres (un ou deux dans notre implémentation) orientés selon la tangente moyenne locale de l'élément (cas 2 et 3). Cet algorithme est décrit précisément ci-dessous.

On rappelle (voir Annexe D) que le rayon r_h et le pas Δ_h d'une hélice peuvent se déduire des courbures et torsion $\kappa_{1,Q}$, $\kappa_{2,Q}$, τ_Q de l'élément de la tige correspondant, par les formules suivantes :

$$r_h = \frac{\kappa_Q}{\Omega_Q^2} \qquad \Delta_h = 2\pi \left(\frac{\tau_Q}{\Omega_Q^2} \right),$$

où $\kappa_Q = \sqrt{\kappa_{1,Q}^2 + \kappa_{2,Q}^2}$ et $\Omega_Q = \sqrt{\kappa_Q^2 + \tau_Q^2}$. Le nombre n_{twist} de tours effectués par le morceau d'hélice S_Q peut alors se calculer comme : $n_{twist} = \frac{\ell_Q}{(2\pi r_h)}$, où ℓ_Q est la longueur de l'élément S_Q (notons alors, toujours d'après l'Annexe D, que la longueur de l'axe principal $\mathbf{\Omega}_Q$ du morceau d'hélice se calcule par la formule $\frac{\ell_Q \tau}{\Omega_Q}$).

Le nombre de spires décrites par l'élément S_Q, ainsi que le pas Δ_h de l'hélice - mesurant le "resserrement" des spires - vont nous servir de critères pour choisir un volume englobant adapté à l'élément considéré. Précisons que ces critères seront réévalués à chaque pas de temps, et donc que les volumes englobants s'adapteront à la géométrie courante des mèches de la chevelure. En notant $\mathcal{C}(\mathbf{a}, r)$ le cylindre d'axe unitaire $\frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$, de longueur $||\mathbf{a}||$, et de rayon r, le volume englobant $\mathcal{V}_e$ de l'élément est alors calculé ainsi :

$$\begin{array}{lll}
\text{Cas 1 : si } (n_{twist} \geq n_{twist}^{max}) \text{ et } (\Delta_h < \Delta_h^{max}) & \mathcal{V}_e = & \mathcal{C}\left(\frac{\ell_Q \tau_Q}{\Omega_Q^2} \mathbf{\Omega}_Q, r_h + r_w \right) \\
\text{Cas 2 : si } (n_{twist} \geq n_{twist}^{min}) & \mathcal{V}_e = & \mathcal{C}\left(\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(\frac{s_{Q-1}+s_Q}{2}) - \mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s_{Q-1}), r_w \right) \\
 & + & \mathcal{C}\left(\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s_Q) - \mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(\frac{s_{Q-1}+s_Q}{2}), r_w \right) \\
\text{Cas 3 : sinon} & \mathcal{V}_e = & \mathcal{C}\left(\mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s_Q) - \mathbf{r}^{\mathrm{SH}}(s_{Q-1}), r_w \right)
\end{array}$$

où r_w est le rayon de la mèche guidée par la Super-Hélice, et n_{twist}^{min}, n_{twist}^{max} et Δ_h^{max} sont des seuils fixés par l'utilisateur, en fonction de la précision des volumes englobants souhaités.

Cet algorithme est illustré sur la Figure 7.5. Dans la suite, on appellera *volume guide* le volume englobant défini à partir d'un cheveu guide pour la mèche correspondante (ensemble de cylindres englobants).

b) Suivi des paires de points les plus proches

Nous avons adapté l'algorithme de Raghupathi *et al.* [RCFC03], conçu pour la détection d'auto-collisions d'objets longilignes, à la détection des collisions entre plusieurs mèches. Le suivi des paires de points les plus proches est effectué entre les squelettes (ou axes principaux) des cylindres servant de volumes englobants pour les différentes mèches, tels que définis précédemment. On se ramène alors, comme dans l'algorithme de Raghupathi *et al.*, à un suivi de paires de *segments* les plus proches. Une liste stocke ainsi ces paires au cours de la simulation. Au départ, cette liste est initialisée avec toutes les paires qui peuvent être formées en prenant tous les segments adjacents aux racines des cheveux. Puis cette liste est mise à jour à chaque pas de temps. Pour chaque paire de segments (seg_i, seg_j) :

– De même que dans [RCFC03], on teste les neuf paires de segments formées à partir des segments voisins de seg_i et de seg_j (le voisinage de deux segments étant pris au sens de l'adjacence

de ces segments le long de leur volume guide commun), et on tire la nouvelle paire de segments les plus proches qui va remplacer la précédente. Cette méthode permet ainsi de propager une paire de détection le long de mèches en interaction.
- La paire sera supprimée et non remplacée si elle-même, ainsi que toutes les paires formées par son voisinage, sont constituées de segments dont la distance est supérieure à un certain seuil $dist_{max}$, au-delà duquel on estime qu'il n'est plus nécessaire d'effectuer un suivi.
- Si la distance entre les segments seg_i et seg_j est inférieure à un seuil $dist_{min}$ (déterminé par la somme des rayons des cylindres englobants correspondants), alors le processus de réponse à la collision est déclenché. De plus, les paires constituées des segments voisins de seg_i et de seg_j sont ajoutées à la liste des paires suivies.

En pratique, nous avons pu, sans constater de fort ralentissement de la simulation, choisir $dist_{max}$ suffisamment grand pour maintenir constamment au moins une paire de points les plus proches pour chaque couple de cheveux guide (cette paire se retrouvant le plus souvent près des racines, dont la position relative est fixe au cours de l'animation). Contrairement à [RCFC03], nous n'avons pas jugé utile d'ajouter de nouvelles paires de manière aléatoire au cours de la simulation. En effet, d'une part chaque paire de cheveux guide est constamment suivie par au moins une paire de points les plus proches, d'autre part il semble que la propagation des paires de segments les plus proches depuis les racines jusqu'aux pointes suffit à assurer le suivi d'une grande partie des interactions "à risque", car au cours du mouvement, les mèches de cheveux ont globalement toujours tendance à se rapprocher les unes des autres d'abord au niveau des racines, puis des pointes. Cependant, une étude plus approfondie des résultats obtenus avec cet algorithme serait nécessaire pour prouver ou non la pertinence de la méthode.

Notons que le même algorithme est utilisé pour détecter les collisions entre les mèches et le corps. Dans ce cas cependant, les tests de distance ont lieu entre des segments et des sphères, puisque comme aux chapitres précédents, le corps du personnage est représenté par un ensemble de sphères de collision.

Réponse

Étant donné le paramétrage du modèle de Super-Hélice par des courbures et torsion, il est très délicat d'imposer à ce modèle des contraintes en position ou en vitesse. Cependant, il est possible d'interagir avec ce modèle par le biais de forces, aussi avons-nous choisi de calculer la réponse aux collisions par des forces de pénalité.

Comme dans [Dur04], l'algorithme est stabilisé grâce à une régularisation quadratique pour les petites pénétrations. Soit gap la distance d'interpénétration entre deux morceaux de mèches w_i et w_j, évaluée lors de la phase de détection comme $gap = r_w^i + r_w^j - d(seg_i, seg_j)$, où r_w^i (resp. r_w^j) est le rayon du morceau de mèche w_i (resp. w_j), et où $d(seg_i, seg_j)$ est la distance entre les deux segments portant les morceaux de mèches (correspondant à une paire de segments les plus proches, détectée par l'algorithme précédent). À partir d'une profondeur de régularisation δ_{reg} (choisie arbitrairement), on calcule la force de réaction normale $\boldsymbol{R_N}$ exercée entre les deux points les plus proches comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } (gap \leq 0) & \boldsymbol{R_N} = \boldsymbol{0} \\ \text{si } (0 \leq gap \leq \delta_{reg}) & \boldsymbol{R_N} = \frac{k_c\, gap^2}{2\delta_{reg}} \boldsymbol{n_c} \\ \text{sinon} & \boldsymbol{R_N} = k_c \left(gap - \frac{\delta_{reg}}{2}\right) \boldsymbol{n_c} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{n_c}$ est le vecteur unitaire indiquant la direction de collision (calculée comme le produit vectoriel des deux vecteurs définissant les deux segments les plus proches), et k_c est réglé de manière arbitraire.

Pour modéliser le frottement entre les mèches en contact, nous utilisons la même loi de frottement visqueux que dans [CK05a] :

$$\mathbf{R_T} = -\nu \left(\mathbf{v_{rel}} - (\mathbf{v_{rel}} \cdot \mathbf{n_c})\, \mathbf{n_c}\right).$$

où $\mathbf{v_{rel}}$ est la vitesse relative des deux mèches en contact.

Dans le cas du frottement entre une mèche et un objet extérieur, nous modulons le coefficient de frottement ν par une fonction trigonométrique de manière à tenir compte de l'anisotropie de l'état de surface des cheveux (voir Section 5).

Discussion

L'algorithme de détection mis en place s'est avéré efficace, en mobilisant seulement 20 % du processeur au cours d'une simulation. Le nombre minimal de paires testées à chaque pas de temps est de l'ordre de n^2 où n est le nombre de cheveux directeurs (et non le nombre de segments comme ce serait le cas pour un algorithme naïf). De nouvelles paires ne sont créées que si une collision est détectée, donc, le plus souvent, uniquement entre des mèches voisines. Si par hasard deux mèches non-voisines sur le cuir chevelu se retrouvent en collision, une nouvelle paire sera créée mais détruite par la suite lorsque les deux mèches s'éloigneront à nouveau (une seule paire sera conservée à la racine, là où la distance entre les deux cheveux restera inférieure au seuil fixé). Nous aimerions à l'avenir évaluer de manière plus précise les performances de cet algorithme, et vérifier s'il est suffisamment conservatif, en mesurant la proportion moyenne de collisions détectées par rapport au nombre de collisions effectives, sur une certain durée. D'autre part, nous avons remarqué que le saut discret des volumes englobants de chaque mèche, d'une représentation à une autre et en fonction de l'enroulement local de la mèche, pouvait poser des problèmes de stabilité. Afin de pallier à cet inconvénient, il s'agirait de proposer une manière pour adoucir les transitions entre les différents niveaux de représentations possibles.

Nous avons commencé, en nous inspirant des travaux de Redon *et al* sur la détection continue de collisions entre objets rigides [RKC02], à adapter l'algorithme de détection continue au cas des interactions entre fibres. Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas encore pu mener cette étude à terme. Nous souhaiterions revenir sur cette méthode par la suite, car nous jugeons qu'elle est particulièrement adaptée à la détection des contacts entre des objets très fins tels que les cheveux ou les petites mèches de cheveux, dont l'interpénétration n'est souvent pas détectée par des méthodes classiques discrètes, en particulier si le mouvement simulé est rapide.

4.3 Génération de la géométrie des cheveux à partir des cheveux guide

Nous aimerions être capable d'animer des chevelures très lisses et d'aspect continu, aussi bien que des chevelures nettement séparées en paquets de cheveux (chevelure bouclée par exemple). De plus, beaucoup de chevelures réelles (ondulées) ont généralement un aspect lisse et continu près du cuir chevelu, tandis que les pointes forment des mèches séparées (voir Figure 3.2 du Chapitre 3, à gauche). Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un modèle procédural de chevelure complète entièrement basé sur la notion de mèche. Si ce modèle simple peut suffire pour la génération de coiffures statiques (grâce à ce modèle, nous pouvions obtenir des coiffures naturelles réalistes pour des cheveux lisses, ondulés et bouclés), il ne permettrait cependant pas d'habiller ces mêmes chevelures en mouvement de manière convaincante, car les mèches seraient beaucoup trop visibles au cours de l'animation.

Afin de pouvoir représenter le plus grand nombre de chevelures dynamiques par un modèle d'habillage unique, nous proposons ainsi d'affiner le modèle procédural de mèche présenté au chapitre précédent. Notre nouveau modèle constitue en fait un intermédiaire entre les approches représentant

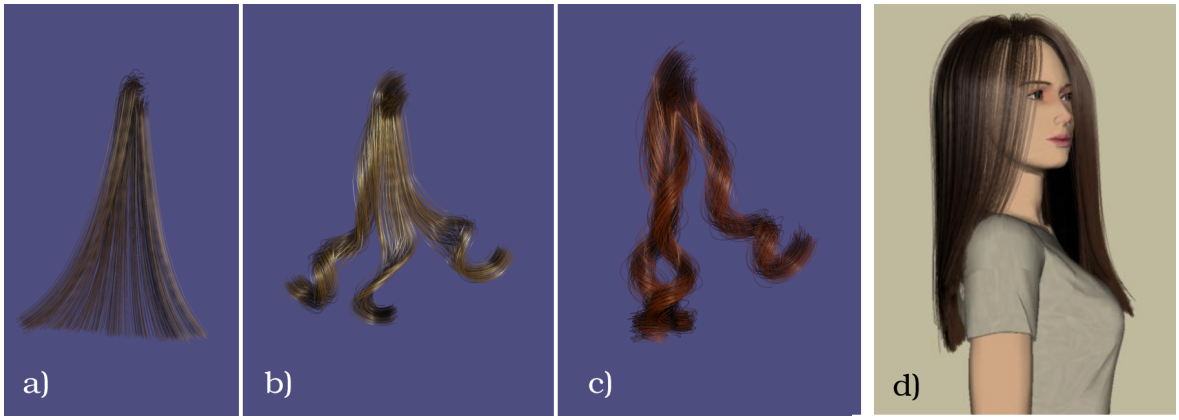
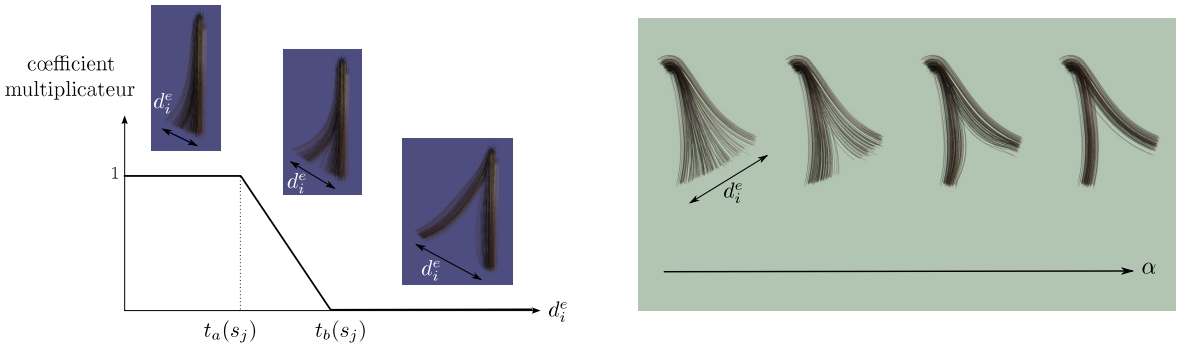


FIG. 7.6: *Algorithme semi-interpolant pour la génération de la géométrie finale des cheveux à partir des trois cheveux guide : a) les cheveux sont interpolés à partir des positions des cheveux guide, depuis les pointes jusqu'aux racines ; b) les cheveux sont interpolés près des racines, mais pas près des pointes où des mèches distinctes apparaissent ; c) aucune interpolation, les cheveux restent groupés autour de leur cheveu guide principal d'où l'apparition de mèches disjointes ; d) l'interpolation à travers l'épaule droite du personnage est évitée grâce au critère de distance maximale entre les pointes des cheveux guide.*

la chevelure comme un ensemble de mèches séparées, et celles représentant la chevelure comme un continuum. Le principe consiste à tracer des cheveux (appelés cheveux cible) à partir d'un ensemble de cheveux guide voisins, en réglant l'influence (ou le poids) de chaque cheveu guide sur la position des cheveux cible tracés. Si un cheveu guide donné a un poids prépondérant sur chaque cheveu cible, alors le paquet des cheveux cible ainsi tracés restera groupé autour de ce cheveu guide, et ne sera pas influencé par les autres cheveux guide pendant l'animation. Si, au contraire, les influences des différents cheveux guide sur chaque cheveu cible sont équilibrées, alors le paquet de cheveux cible prendra l'apparence, au cours de l'animation, d'un continuum entre les différents cheveux guide. Un critère sur la distance maximale tolérée entre les extrémités libres des cheveux cible et des cheveux guide permet de rompre cette continuité lorsque les cheveux guide s'éloignent trop les uns des autres. De plus, le niveau d'interpolation peut être réglé interactivement le long des cheveux, des racines vers les pointes. L'algorithme précis de ce modèle est décrit ci-dessous, et illustré sur la Figure 7.6.

Soit h le cheveu cible (non simulé) dont nous voulons calculer la géométrie.

1. Lors d'une étape de précalcul, h est assigné à un cheveu guide principal g_{main}, noté également g_0 (il s'agit du cheveu guide issu du triangle sur lequel h pousse), et on sélectionne d'autres cheveux guide g_i, $i \in [1..n_g]$ qui sont suffisamment proches de g_{main} sur le cuir chevelu, selon un seuil de distance maximal t^r toujours choisi supérieur à la distance entre g_{main} et h sur le cuir chevelu (typiquement, dans nos exemples, ce seuil est fixé à une valeur permettant de sélectionner, en plus de g_{main}, entre 3 et 10 cheveux guide voisins). L'influence (ou poids) initial de chaque cheveu guide sur le cheveu h est alors calculée comme une fonction normalisée de la distance euclidienne sur le cuir chevelu entre h et les différents cheveux guide g_i : $\forall i \in [0..n_g], w_i^0 = \frac{t^r - d_i^r}{t^r}$ où les d_i^r sont les distances euclidiennes entre les racines des g_i et la racine de h. Remarquons que pour tout i, on a $0 \leq w_i^0 \leq 1$.
2. Ensuite, à chaque pas de temps :
   – On souhaite tenir compte, au cours du mouvement, de l'éloignement des cheveux guide g_i, $i \in [1..n_g]$ par rapport à g_{main}. Les cheveux étant plus libres de se séparer près des pointes que près des racines, il paraît alors raisonnable de mesurer cet éloignement relatif entre



$$t_a(s_j) = t_a^0 - \alpha\, s_j \qquad t_b(s_j) = t_b^0 - \alpha\, s_j$$

FIG. 7.7: *Rôle des différents paramètres du modèle d'habillage procédural de la chevelure à partir des cheveux guide, illustré sur deux mèches animées chacune par un cheveu guide. À gauche : influence de la distance entre les pointes de cheveux guide sur le degré d'interpolation pour le rendu des cheveux cible. Ce cœfficient vient se multiplier aux poids des cheveux guide pré-calculés à partir de leurs distances relatives sur le cuir chevelu. À droite : influence du paramètre* α *sur la forme interpolée entre deux mèches (*d_i^e *reste constante). Ce paramètre règle le niveau d'interpolation le long des mèches, un peu à la manière d'une fermeture éclair.*

cheveux guide par la distance entre leurs pointes. Pour chaque cheveu guide g_i, on calcule ainsi la distance d_i^e entre l'extrémité libre de g_i et celle de g_{main}. Le poids assigné à chaque cheveu guide est alors multiplié par un coefficient qui est une fonction linéaire par morceaux et décroissante de la distance (voir Figure 7.7) :

$$\begin{cases} \text{si } (0 \le d_i^e < t_a(s_j)) & w_{i,j} = w_i^0 \\ \text{si } (t_a(s_j) \le d_i^e < t_b(s_j)) & w_{i,j} = w_i^0 \frac{t_b(s_j) - d_i^e}{t_b(s_j) - t_a(s_j)} \\ \text{sinon} & w_{i,j} = 0 \end{cases}$$

où les deux seuils t_a et t_b dépendent linéairement de l'abscisse curviligne s_j le long de h. Cette dépendance spatiale le long du cheveu est le point clef de notre algorithme : elle permet en effet de garantir une interpolation des cheveux près des racines tout en préservant un aspect de mèches disjointes près des pointes (voir Figure 7.7).

– Finalement, on calcule la position du cheveu h à l'abscisse curviligne s_j ainsi : $p_{h,j} = \frac{1}{\lambda_j} \sum_k w_{k,j}\, p_{k,j}$ où $p_{k,j}$ est le point sur le cheveu guide g_k d'abscisse curviligne s_j (avec la convention $g_{main} = g_0$), et $\lambda_j = \sum_k w_{k,j}$.

L'utilisateur dispose donc des paramètres t_a^0, t_b^0, et α pour régler le niveau d'interpolation des cheveux tracés autour des cheveux guide. Grâce à ces trois seuils, une très grande variété de types de chevelures peut être rendu de manière réaliste, comme le montrent les Figures 7.1 et 7.14.

5 Validation et résultats

Nous expliquons dans cette section comment les différents paramètres des Super-Hélices - servant de cheveux guide pour le mouvement de la chevelure - sont ajustés, et validons le modèle à l'aide d'expériences simples menées sur de vraies mèches de cheveux. Nous présentons ensuite des résultats portant sur la simulation de chevelures complètes, qui illustrent la pertinence du modèle proposé. Notamment, grâce au modèle de Super-Hélice dynamique, nous sommes pour la première fois capables de simuler la dynamique de cheveux bouclés. Les vidéos montrant l'ensemble des animations produites sont disponibles à l'adresse http ://www-evasion.imag.fr/Publications/2006/BACQLL06/.

5.1 Choix des paramètres du modèle

Dans notre modèle de chevelure, chaque Super-Hélice représente un *cheveu unique* appartenant à une *mèche élémentaire*, qui par hypothèse se déforme de manière continue : le mouvement de tous les cheveux appartenant à la mèche élémentaire va pouvoir ainsi être guidé par le mouvement d'un seul de ses cheveux. Pour reproduire le mouvement d'un groupe de cheveux réels (il pourra s'agir d'une mèche élémentaire de cheveux, guidée par une seule Super-Hélice, ou bien d'un ensemble de mèches élémentaires, par exemple une chevelure complète, guidée par un ensemble de Super-Hélices), nous fixons tout d'abord les paramètres internes de chaque Super-Hélice à partir des propriétés structurelles et physiques moyennes des cheveux individuels composant la mèche élémentaire correspondante. Ensuite, nous ajustons les paramètres de frottement du modèle en observant l'amortissement subi par la mèche élémentaire au cours de son mouvement. Finalement, dans le cas où nous animons un ensemble de mèches élémentaires, nous réglons les forces d'interaction entre Super-Hélices pour tenir compte des contacts entre les mèches au cours du mouvement. Nous expliquons ici comment tous ces paramètres peuvent être choisis de manière cohérente, à l'aide d'expériences simples menées sur des mèches élémentaires réelles.

Masse et élasticité

La masse volumique ρ de la Super-Hélice est prise égale à la valeur de $1,3\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$, typique pour le cheveu. Le rayon moyen r et l'excentricité e de la section de la Super-Hélice sont mesurées à partir d'observations microscopiques des cheveux réels (voir Figure 7.8, à gauche), tandis que le module d'Young et le coefficient de Poisson sont tirés de tables existantes, qui rapportent les mesures de ces paramètres en fonction du groupe ethnique d'appartenance des cheveux [Rob02, FHB+03]. Ces paramètres servent à calculer les rigidités en courbures ($(EI)_{i=1,2}$) et en torsion (μJ) de la Super-Hélice, par les formules classiques que nous avons données au Chapitre 5.

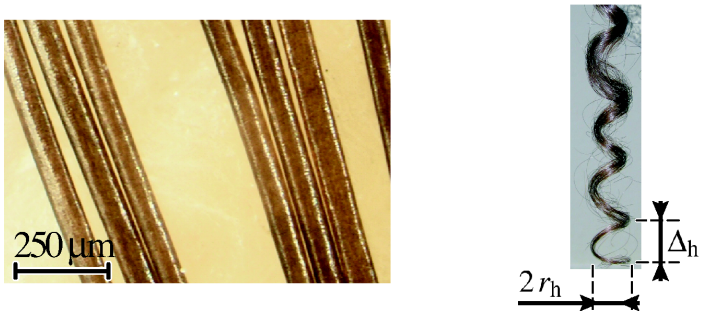


FIG. 7.8: *À gauche : mesure du rayon moyen r et estimation de l'excentricité e du modèle de Super-Hélice à partir des propriétés géométriques des vraies fibres de cheveux, observées au vidéomicroscope par un spécialiste (grossissement* $\times 100$*). À droite : mesure du rayon* r_h *et du pas* Δ_h *de la forme en hélice approximant la pointe de la mèche réelle de cheveux. Ces valeurs sont utilisées pour estimer la frisure naturelle du modèle de Super-Hélice représentant la mèche.*

Frisure naturelle

Les torsion et courbures naturelles $(\kappa_i^0)_{i=0,1,2}$ sont fixées par les formules suivantes, qui inversent (en faisant une légère approximation) les expressions du rayon et du pas d'une hélice données en Annexe D :

$$\kappa_1^0 = 1/r_\mathrm{h} \qquad \kappa_2^0 = 0 \qquad \tau^0 = \frac{\Delta_\mathrm{h}}{2\pi r_\mathrm{h}^2},$$

où r_h est le rayon et Δ_h le pas de la forme en hélice du bout libre de la mèche élémentaire réelle (voir Figure 7.8, à droite). En effet, les conditions au bord libre de la tige de Kirchhoff, données au Chapitre 5 dans l'équation (5.17), impliquent que les vraies torsion et courbures $(\kappa_i)_{i=0,1,2}$ sont, au point $s = L$, égales à leurs valeurs spontanées respectives $(\kappa_i^0)_{i=0,1,2}$.

En pratique, nous modulons ces valeurs par de faibles variations le long de la tige, de manière à générer des résultats moins réguliers et plus réalistes. Nous avons remarqué que dans la réalité, la plupart des types de cheveux présentent une torsion naturelle τ^0 quasiment nulle, excepté le type africain (voir Tableau 7.1).

	Asiatique (lisse)	**Caucasien 1 (ondulé)**	**Caucasien 2 (bouclé)**	**Africain (crépu)**
Rayon (μm)	50	35	50	50
Excentricité	0	0,42	0,42	0,55
Rayon de l'hélice (cm)	0	1	0,6	0,1
Pas de l'hélice (cm)	0	0,5	0,5	1
Module d'Young (GPa)	1	2	1,5	0,5
Coefficient de Poisson	0,48	0,48	0,48	0,48

TAB. 7.1: *Propriétés structurelles et physiques de cheveux réels, mesurées sur quatre types de cheveux appartenant à différents groupes ethniques.*

Frottement interne $\gamma_i = \mu(\mathbb{K})_i$

Ce paramètre mesure la quantité de déformation interne de la Super-Hélice au cours du mouvement. Il modélise entre autres les interactions de nature dissipative qui se produisent entre cheveux au sein du groupe guidé par la Super-Hélice. Nous avons constaté qu'en pratique, ce paramètre peut se régler assez facilement en comparant, entre une mèche réelle et la mèche simulée soumises aux mêmes oscillations forcées verticales, l'amplitude des déformations internes affectant la forme générale de la mèche (voir Figure 7.9).

Pour rester cohérent avec les valeurs indiquées dans notre publication à SIGGRAPH [BAC+06], nous donnerons les valeurs choisies non pas pour μ, mais pour le produit $\gamma_i = \mu(\mathbb{K})_i$, $i = 0,1,2$. En pratique, les coefficients $(EI)_i$ de la matrice $\mathbb{K}$ sont relativement proches, donc on donnera uniquement la valeur moyenne γ choisie pour les différents γ_i. Typiquement, nous avons obtenu des résultats satisfaisants en choisissant γ dans la plage de valeurs $[5.10^{-10}, 5.10^{-11}]$ kg $\cdot$ m^3 $\cdot$ s^{-1}, une valeur faible correspondant à une mèche "nerveuse", et une forte valeur correspondant à une mèche qui se déforme beaucoup moins lors d'un mouvement similaire (sans doute à cause des contraintes internes qui peuvent par exemple s'exercer dans une mèche emmêlée).

Frottement de l'air ν

Une fois que le paramètre γ a été choisi, le coefficient de frottement entre l'air et les cheveux peut être ajusté en comparant le temps d'amortissement entre la mèche réelle et la mèche simulée, par exemple sur un mouvement de balancier imposé à la racine (on choisit un mouvement pour lequel la mèche ne sera pas amenée à trop se déformer en interne, de manière à décorréler le plus possible l'influence de ν et de γ sur l'effet dissipatif de la mèche). Lors de ces expériences, nous avons noté que le paramètre de frottement de l'air, ν, est fortement relié à la *discipline* de la mèche (cette notion, qui quantifie le degré d'alignement local des cheveux à l'intérieur de la mèche, a été introduite au Chapitre 1). Comme illustré sur la vidéo, les chevelures emmêlées ou crépues contiennent en effet

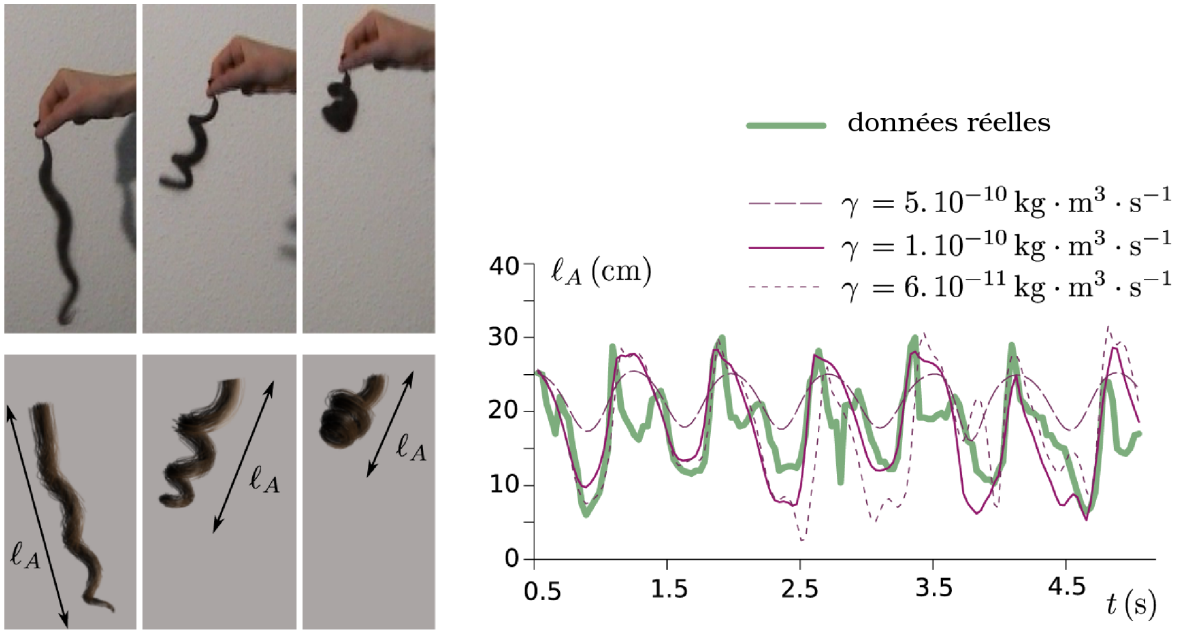


FIG. 7.9: *Ajustement de γ sur un mouvement oscillatoire vertical d'une mèche bouclée et disciplinée. À gauche, comparaison entre l'expérience réelle (en haut) et virtuelle (en bas). À droite, on compare la longueur apparente ℓ_A de la mèche entre les données réelles et les données simulées, pour différentes valeurs de γ. Dans ce cas précis, des résultats qualitativement similaires sont obtenus en choisissant $\gamma = 1.10^{-10}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$.*

beaucoup plus d'air que les chevelures comportant des mèches régulières, et donc sont soumises à une dissipation visqueuse beaucoup plus importante au cours du mouvement (la surface des cheveux soumise au frottement de l'air est plus importante dans ce type de chevelures "aérées" que dans les chevelures "serrées"). En pratique, nous avons choisi, pour le coefficient ν de frottement avec l'air, des valeurs comprises entre $5.10^{-6}\ \mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s})^{-1}$ (cheveux disciplinés) et $5.10^{-5}\ \mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s})^{-1}$ (cheveux emmêlés).

Contact entre les cheveux et un objet extérieur

Comme nous l'avons vu auparavant, les contacts entre notre modèle de cheveux et les objets extérieurs (tels que le corps du personnage) sont simulés par des forces de pénalité qui incluent une composante normale élastique combinée à une composante tangentielle modélisant un frottement visqueux. Pour simuler des contacts réalistes entre les cheveux et des objets extérieurs, on utilise une réponse anisotrope, qui tient compte des écailles recouvrant les fibres individuelles.

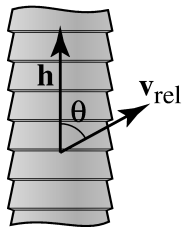


FIG. 7.10: *Angle θ formé entre l'orientation $\mathbf{h}$ de la fibre et sa vitesse relative $\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}$ par rapport à un objet extérieur en contact.*

Le paramètre de frottement visqueux β_0 entre les cheveux pour un matériau donné est directement réglé à partir des observations réelles d'une mèche glissant sur le matériau en question (peau,

vêtement, etc.), et modulé ensuite par une fonction sinusoïdale pour tenir compte de l'orientation des fibres capillaires par rapport à leur vitesse de glissement sur l'objet extérieur : $\beta = \beta_0(1+\sin(\theta/2))$, où l'angle θ est défini sur la Figure 7.10. La Figure 7.11 et la vidéo montrent des exemples, réels et simulés, de contacts entre une mèche de cheveux (lisse, puis bouclée) et deux matériaux distincts (bois et tissu en coton) présentant une rugosité différente.

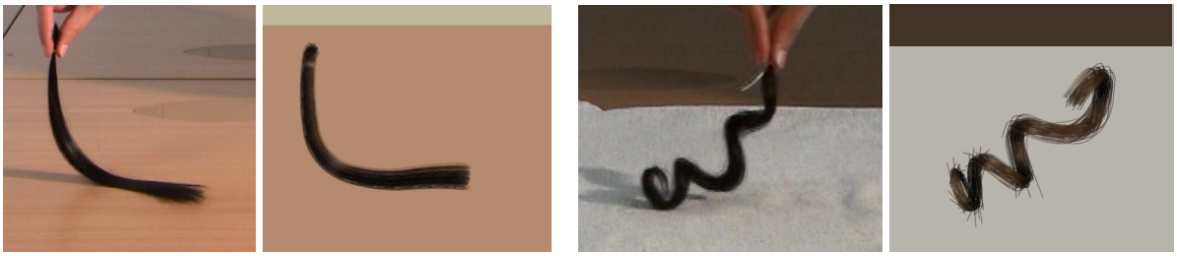


FIG. 7.11: *Validation du modèle de frottement, sur un mouvement de glissement d'une mèche lisse (à gauche) et bouclée (à droite). Le coefficient de frottement a été réglé de manière à correspondre au mieux au matériau sur lequel s'effectue le glissement (bois lisse à gauche, tissu en coton à droite).*

5.2 Comparaisons visuelles

Mèche de cheveux

Nous avons reproduit virtuellement une série d'expériences réelles menées sur des mèches élémentaires de cheveux lisses et bouclées. Ces comparaisons entre réel et virtuel montrent que le modèle dynamique de Super-Hélice capture de manière fidèle les principaux comportements typiques des cheveux en mouvement. Nous avons utilisé la technique décrite précédemment pour ajuster les paramètres de la Super-Hélice, à partir des caractéristiques physiques de la mèche réelle manipulée. Comme illustré sur la Figure 7.12, à gauche, et sur la vidéo, notre modèle de Super-Hélice modé-



FIG. 7.12: *À gauche : mise en évidence du flambage d'une mèche sur un mouvement oscillatoire vertical forcé, imposé à la racine. À droite : validation du modèle procédural de mèche et du modèle d'interaction entre groupes de cheveux au cours d'un mouvement rapide.*

lise correctement le comportement non-linéaire des cheveux (phénomène de flambage, instabilités en flexion/torsion), ainsi que la "nervosité" caractéristique des mèches bouclées et bien disciplinées, lorsque celles-ci sont soumises à des mouvements oscillatoires importants. Toutes ces expériences nous ont également permis de nous assurer de la bonne stabilité du modèle, y compris pour des mouvements rapides.

Chevelure complète

Nous avons validé notre modèle d'interactions entre cheveux présenté en Section 4, en comparant très précisément le mouvement d'une grosse mèche réelle avec le mouvement d'une mèche simulée à l'aide de trois cheveux guide en interaction les uns avec les autres. Notre simulateur est capable de reproduire fidèlement le mouvement et la cohésion entre cheveux voisins (voir Figure 7.12, à droite, et la vidéo). Finalement, la Figure 7.13 montre que notre modèle capture de manière convaincante les effets complexes se produisant au sein d'une chevelure complète soumise à un mouvement de rotation rapide de la tête. Dans cette exemple, 200 cheveux guide ont été simulés.



FIG. 7.13: *Comparaison entre une chevelure complète réelle et notre modèle, sur un mouvement rapide de rotation de la tête autour de l'axe vertical.*

5.3 Résultats finaux et performances

Les Figures 7.1, 7.14, et la dernière partie de la vidéo montrent plusieurs exemples de chevelures animées à partir de mouvements précalculés d'un corps de personnage. Nous avons sur ces exemples simulé des cheveux de différentes longueurs (longs, mi-longs, courts) et caractérisés par différentes frisures (cheveux lisses, ondulés et bouclés). Ces chevelures ont été animées en simulant une centaine de cheveux guide. Les paramètres physiques choisis pour ces simulations sont indiqués dans le Tableau 7.1.

Pour tous les types de cheveux que nous avons pu simuler en utilisant ce modèle, nous avons jugé inutile d'utiliser plus de $N = 10$ éléments hélicoïdaux par cheveu guide, même pour des cheveux bouclés et très longs ($\approx 80\,\text{cm}$). En effet, si l'on augmente N au-delà d'un certain seuil, l'amélioration de la qualité visuelle de la simulation devient imperceptible.

Nous avons implémenté ce modèle sur un processeur Pentium classique de 3 GHz. Nous parvenons à simuler jusqu'à 10 cheveux guide en temps-réel, tandis qu'une chevelure complète, composée d'une centaine de cheveux guide, peut être animée relativement rapidement, à raison de $0,3$ s. à 3 s. par image. Les performances de notre méthode - même si cela ne correspondait pas à un objectif de départ - sont donc aussi bonnes que celles obtenues par d'autres approches récentes d'animation

de cheveux, telles que [CCK05]. Ceci est dû tout d'abord à la bonne stabilité du modèle de Super-Hélice, qui nous permet d'utiliser pour la plupart des mouvements de larges pas de temps $\approx 1/30$ s., et ensuite à l'ordre élevé de représentation fourni par les hélices, permettant de simuler un nombre N limité d'éléments tout en offrant une bonne précision. Enfin, notons que l'algorithme efficace utilisé pour la détection de collision s'est avéré peu pénalisant en terme de temps de calcul.



FIG. 7.14: *Résultats finaux, obtenus pour des cheveux longs et courts, lisses et bouclées, animés par différents mouvements.*

5.4 Limitations

Notre modèle dynamique de cheveux présente encore un certain nombre de limitations. Nous avons montré que le modèle mécanique de Super-Hélice s'avère très satisfaisant puisqu'il modélise de manière précise la dynamique de cheveux aussi bien lisses que bouclés, tout en préservant une bonne stabilité, quel que soit le nombre N d'éléments hélicoïdaux choisis pour les cheveux guide. Cependant, la matrice $\mathbb{M}$ utilisée pour les calculs dynamiques est une matrice carrée pleine, et donc, le temps de calcul augmente de manière quadratique par rapport au nombre N d'éléments simulés. En

réalité, ce problème est mineur puisque comme nous l'avons vu plus haut, N n'a pas besoin d'être très grand pour permettre une simulation précise. De plus, la complexité de la simulation reste linéaire par rapport au nombre de cheveux simulés.

En outre, les contraintes sont pour l'instant traitées par des forces de pénalité, ce qui n'est pas très satisfaisant. Les méthodes analytiques seraient plus appropriées, car elles permettraient, outre le fait de stabiliser les interactions, de modéliser du frottement solide entre les cheveux et le corps du personnage. C'est l'une des extensions du modèles envisagées pour la suite.

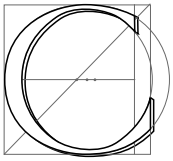
Bien que nous ayons pu avancer dans la compréhension du comportement collectif d'une assemblée de cheveux, nous ne disposions pas de données réelles suffisantes pour mettre au point un modèle d'interaction puissant. En effet, le calcul des cheveux non-simulés par l'interpolation des cheveux guide peut conduire à une perte de détails géométriques au sein de la chevelure ; de plus, lorsque des objets fins entrent en collision avec la chevelure, la granularité relativement grossière de la chevelure peut devenir assez visible et gênante. Le fait de pouvoir quantifier la tendance des cheveux à se grouper entre eux en fonction de leur type, de leur emmêlement, ou des collisions avec des objets extérieurs serait une voie intéressante à explorer. Dans cette optique, les relations entre les interactions cheveux/cheveux et la frisure/discipline pourraient être étudiées plus précisément.

6 Bilan

Ce chapitre a présenté un modèle déformable permettant de simuler la dynamique de cheveux pour un grand nombre de types de cheveux différents. En particulier, la simulation des cheveux bouclés, un problème notoirement difficile, a pu être traitée pour la première fois grâce à ce modèle. Les Super-Hélices sont issues du modèle de tige de Kirchhoff, présenté au Chapitre 5, auquel on applique la dynamique Lagrangienne. Ce modèle fournit un nombre librement ajustable de degrés de liberté, et tient compte des caractéristiques importantes des cheveux telles que leurs courbures et torsion naturelles, ainsi que la forme elliptique de leur section transversale. Afin de mettre en évidence la puissance offerte par les Super-Hélices dynamiques pour représenter des cheveux en mouvement, nous avons présenté une validation rigoureuse de ce modèle, qui s'appuie sur une série d'expériences comparatives menées sur des cheveux réels et simulés. Nous avons également remarqué que le coût de calcul engendré par la simulation des Super-Hélices est très raisonnable : ceci est dû à la bonne stabilité de la méthode, à l'ordre élevé d'interpolation fourni par les hélices, ainsi qu'à l'efficacité de l'algorithme employé pour la détection de collisions.

Une direction de recherche intéressante pour la suite serait d'adapter notre modèle de cheveux à la simulation temps-réel, dans le but, par exemple, d'effectuer des opérations interactives de coiffure virtuelle en manipulant des cheveux dynamiques ; une autre piste consisterait à exploiter un tel modèle pour l'animation temps-réel de personnages dans le contexte du jeu vidéo. L'idée serait de concevoir une version *adaptative* du modèle de Super-Hélice, dans laquelle le nombre de morceaux hélicoïdaux - correspondant à la résolution de la tige - pourrait varier en fonction de la déformation courante de la tige, ainsi que de la puissance de calcul disponible. Nous pourrions alors nous inspirer de l'approche suivie récemment par Redon [RGL05] pour simuler de manière adaptative des corps rigides articulés.

Conclusion



E MÉMOIRE présente les travaux que nous avons menés pour analyser et apporter des solutions au difficile problème de la simulation de chevelures virtuelles. Grâce aux différentes collaborations auxquelles nous avons eu la chance de participer au cours de cette thèse, nous avons pu étudier et attaquer ce sujet sous divers angles. Nous récapitulons ici l'ensemble des contributions apportées par cette thèse, et envisageons un certain nombre de perspectives futures, avant de conclure par une réflexion d'ordre plus général sur la simulation de phénomènes naturels par modèles physiques.

Résumé des contributions

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la conception de nouveaux algorithmes pour optimiser les simulations de chevelures existantes. Nous avons tout d'abord introduit l'animation adaptative de chevelures, dont le principe est l'adaptation automatique du nombre de degrés de liberté de la chevelure en fonction de son mouvement. Cette méthode permet de réduire notablement le coût de simulation d'une chevelure complète, en concentrant les calculs uniquement là où ils sont nécessaires. Elle rend également compte de certains effets de groupement et de séparation dynamiques des cheveux en mèches, en fonction de la complexité locale du mouvement. Une deuxième étude, menée cette fois-ci sur le rendu d'une chevelure en mouvement, nous a conduit à considérer la chevelure comme un milieu volumique, représenté par des structures de données adaptées à la mise à jour rapide de sa densité locale, et au calcul efficace de son interaction avec une lumière directionnelle. Cette recherche nous a finalement permis de montrer, pour la première fois, qu'il était possible d'envisager des scènes *interactives* de bonne qualité comportant des animations de longs cheveux.

Dans un second temps, nous avons participé à une collaboration pluridisciplinaire et très enrichissante sur la simulation réaliste de cheveux, avec comme partenaires des chercheurs de L'Oréal, ainsi que Basile Audoly, chercheur en modélisation mécanique. Cette collaboration nous a permis de mettre au point un simulateur physique précis de chevelures statiques et dynamiques, contrôlable

grâce à un jeu réduit de paramètres intuitifs pour l'utilisateur. Ce simulateur est actuellement en cours de transfert industriel vers les laboratoires de L'Oréal, qui souhaiteraient à terme l'étendre et l'utiliser dans le cadre d'applications cosmétologiques.

Perspectives

Vers l'animation temps-réel de personnages virtuels

Les travaux que nous avons développés pour la simulation interactive de chevelures ont commencé à être intégrés dès la fin 2004 au sein de la plate-forme GrImage de réalité virtuelle de l'INRIA (grille de calcul), grâce notamment aux travaux de Jérémie Allard et de Clément Ménier, en thèse au Laboratoire ID (spécialisé en parallélisme). L'intégration de cheveux dynamiques à la plate-forme a permis ainsi de coupler la capture et la reconstruction géométrique temps-réel de personnes réelles mobiles dans la zone de capture (travaux précédemment menés par Jean-Sébastien Franco de l'équipe MOVI du Laboratoire GRAVIR) à la synthèse de cheveux animés : la chevelure, attachée au clone virtuel, subit son mouvement et donc celui de la personne réelle[2] (voir Figure 7.15).



FIG. 7.15: *À gauche et au milieu, démonstration de la plate-forme GrImage (couplée à la simulation de cheveux virtuels) au grand public lors de la Fête de la Science 2004. Les deux personnes réelles (à gauche) sont capturées en 3D par quatre caméras ; leurs clones virtuels, projetés sur l'écran (au milieu), et sur l'un desquels on a apposé une chevelure virtuelle dynamique, reproduisent en temps-réel les mouvements des vraies personnes : la chevelure virtuelle suit en temps-réel le mouvement capturé pour la tête. À droite, simulation temps-réel d'une chevelure auto-ombrée grâce à une version parallélisée et optimisée de notre algorithme présenté au Chapitre 4.*

À l'heure actuelle, Clément Ménier poursuit les travaux d'optimisation et de parallélisation des algorithmes que j'ai mis au point dans la seconde partie de ma thèse (en particulier, les algorithmes de rendu), afin de parvenir à la simulation dynamique temps-réel de chevelures visuellement réalistes sur la grille de calcul. L'intégration d'un tel simulateur de cheveux dans la plate-forme GrImage devrait ainsi permettre d'accroître le réalisme et d'enrichir la diversité des personnages virtuels déjà animés dans cette plate-forme. Couplée à une représentation 3D fidèle de la personne, cette application pourrait alors rejoindre, dans un avenir proche, l'objectif de miroir virtuel que nous évoquions en introduction, et qui pourrait notamment servir à l'essayage de coiffures dynamiques virtuelles.

[2] Avec plusieurs doctorants des laboratoires GRAVIR et ID, nous avons organisé fin 2004, dans le cadre de notre projet de monitorat, des démonstrations de cette plate-forme au grand public à l'occasion de la Fête de la Science. Notre rapport de monitorat, qui explique l'organisation de ces démonstrations et illustre le succès rencontré auprès du grand public, est disponible à l'url : http ://www-evasion.imag.fr/Membres/Florence.Bertails/rapportProjetMonitorat.pdf .

Extensions et améliorations du modèle de Super-Hélice dynamique

Le modèle mécanique de Super-Hélice, conçu par Basile Audoly, est très novateur et j'ai pu montrer dans ma thèse en quoi ce modèle était parfaitement adapté à la simulation réaliste de cheveux. Il reste encore beaucoup à exploiter du modèle de Super-Hélice pour l'animation. Par exemple, nous avons étudié au Chapitre 6 l'évolution de la forme statique des cheveux selon leur longueur, ou encore selon leur groupe ethnique d'origine ; il serait très intéressant d'étudier le *mouvement* de cheveux selon ces mêmes facteurs. Nous pourrions également imaginer d'étendre ce modèle à la dynamique de végétaux, ou à tout autre objet composé de tiges flexibles.

Nous avons vu au Chapitre 7 que la résolution numérique du modèle de Super-Hélice dynamique faisait appel à l'inversion d'une matrice mal conditionnée (lorsque le pas de temps choisi diminue, cette matrice tend vers la matrice d'inertie $\mathbb{M}$ qui est non-inversible). Ce problème est lié au fait que le paramètre de torsion n'est pas véritablement indépendant des paramètres de courbures de la tige, en raison de la section très fine du cheveu. Pour améliorer la stabilité de l'algorithme, en particulier lorsque le modèle est sollicité par des mouvements importants, il serait alors nécessaire de sortir de la matrice d'inertie $\mathbb{M}$ la condition liant la torsion aux courbures, afin de se ramener à une matrice inversible quel que soit le pas de temps choisi.

Le coût de résolution de la méthode, quadratique en nombre d'éléments hélicoïdaux, constitue une autre limitation. Il serait intéressant d'étudier la possibilité d'un algorithme de résolution en coût linéaire, même si cela paraît, de prime abord, difficile voire impossible à mettre en œuvre.

Enfin, comme nous l'avons mentionné en conclusion du Chapitre 7, nous souhaiterions proposer un algorithme de simulation multirésolution pour la Super-Hélice, permettant d'adapter automatiquement le nombre et la longueur des éléments hélicoïdaux constituant la tige à la complexité du mouvement, ou à la position de la caméra, etc. Cela nous permettrait alors d'envisager ce modèle pour des applications interactives.

Le problème des interactions

Nous avons proposé dans cette thèse quelques méthodes prenant en compte les interactions entre cheveux. Ces algorithmes nous ont permis de produire des animations de chevelures complètes visuellement plausibles. Il reste cependant beaucoup à faire pour parvenir à traiter les interactions cheveu-cheveu de manière réaliste.

D'une part, la gestion des contacts entre cheveux ou entre mèches pose de véritables problèmes d'un point de vue simulation numérique. Nous avons mis au point plusieurs algorithmes efficaces de détection des collisions entre mèches, basés soit sur une grille de l'espace, soit sur le suivi de paires de points les plus proches. Nous aimerions évaluer précisément l'efficacité de ces algorithmes, et également poursuivre le développement de la méthode de *détection continue* entre cheveux guide, déjà amorcée au Chapitre 7. Quant au traitement des collisions, nous avons pour l'instant résolu les contraintes entre cheveux par des méthodes de pénalité, mais ces méthodes, comme nous l'avons vu au Chapitre 2, ne sont pas très satisfaisantes car les forces introduites pour empêcher la collision sont difficiles à ajuster, et peuvent être la source d'importantes instabilités. Nous souhaiterions, dans le cas de la simulation par Super-Hélices, explorer les méthodes à base de *contraintes analytiques* pour améliorer le traitement des collisions. La réponse au contact est également difficile à simuler. En effet, la nature du frottement entre cheveux réels est assez peu connue actuellement. De plus, si l'on suppose que la loi de Coulomb constitue un premier modèle acceptable pour le frottement entre cheveux, il n'en reste pas moins que cette loi (en particulier, le cas du frottement sec) peut poser des problèmes lors de la simulation numérique.

D'autre part, dans les modèles de chevelure existants - y compris nos modèles - beaucoup d'hypothèses sont émises quant au groupement des cheveux en mèches. Le nombre et la taille des mèches

animées sont en général fixés au départ, de manière plus ou moins arbitraire, et ne rendent donc pas compte des propriétés physiques intrinsèques de la chevelure. La méthode adaptative que nous avons mise au point au Chapitre 3 permet certes de faire varier le nombre de mèches simulées au cours de l'animation, mais les principes de séparation et de fusion des mèches se basent uniquement sur des critères d'accélération, et non sur la *nature des interactions* se produisant entre cheveux au cours du mouvement. Nous avons commencé, au Chapitre 7, à identifier certains facteurs (degré de frisure, discipline ou emmêlement intrinsèque) responsables de la formation de mèches au cours du mouvement, et donc directement liés à la *granularité* apparente de la chevelure. Nous aimerions, à l'avenir, aller beaucoup plus loin dans la modélisation physique du groupement en mèches, en étant capable, à partir d'une modélisation fine des *interactions* entre cheveux, de faire émerger naturellement les comportements collectifs au sein de la chevelure. La solution à ce problème ne passe bien sûr pas par la simulation individuelle de chaque fibre, en contact avec ses voisines, mais plutôt par la conception d'un modèle à plus grande échelle, permettant de prédire les déformations des cheveux non-simulés à partir du mouvement des cheveux guide, et, réciproquement, de répercuter ces déformations sur la dynamique même des cheveux guide.

Réflexion et bilan

Réalisme visuel et réalisme physique

Cette thèse nous a permis d'envisager la problématique de simulation de cheveux sous divers angles. Elle a notamment été l'opportunité pour nous de constater l'attention portée à la modélisation de cheveux, d'un côté par l'industrie du loisir et du cinéma d'animation, de l'autre par l'industrie cosmétique. Il est clair que les besoins et les contraintes de l'industrie du loisir sont très différents de ceux de l'industrie cosmétique. Dans l'industrie du loisir, puisque la production finale est l'image ou l'animation visuelle, ce qui compte principalement est *l'illusion du réel*. Éventuellement, des contraintes de temps-réel, de taille mémoire, ou de facilité de contrôle par un artiste, peuvent s'ajouter à cet objectif. L'industrie cosmétique accorde par contre beaucoup plus d'importance à la *pertinence physique* d'un modèle, et privilégie notamment l'aspect *prédictif* d'un modèle. Dans ce contexte, tout doit être mis en œuvre pour développer la méthode la plus physique possible, l'image brute ayant finalement assez peu d'importance : ce qui compte est le comportement fiable et réaliste du modèle, aux échelles souhaitées. Il n'y a pas de contraintes de temps d'exécution, mais bien évidemment, les simulations rapides sont les bienvenues car elles facilitent les tests.

Ces deux types de besoin sont deux aspects essentiels du domaine de la simulation de phénomènes naturels. Ils ne sont pas forcément incompatibles, même si les approches utilisées au départ sont assez opposées dans chacun des cas. L'approche rigoureuse par modèles physiques peut très bien aider à la conception de modèles pour l'animation efficace ou contrôlée de scènes naturelles - par exemple, le modèle physique de Super-Hélice est suffisamment rapide et contrôlable pour envisager de l'utiliser pour le cinéma d'animation - quitte à simplifier le modèle en le dégradant ou en l'adaptant pour les besoins spécifiques. Réciproquement, les algorithmes procéduraux développés spécifiquement en synthèse d'image peuvent servir à alléger un modèle physique trop compliqué et inexploitable (par exemple pour la gestion de collision, il n'est pas nécessairement recommandé d'utiliser une méthode purement physique, mais plutôt des techniques simplement inspirées de la physique), ou pour gérer les échelles auxquelles on ne s'intéresse pas directement, réduire la complexité d'un système (simulation adaptative), etc.

L'apport de la mécanique pour la simulation d'objets déformables

Grâce à la collaboration menée pendant trois ans autour de la modélisation physiquement réaliste de chevelures, j'ai pu acquérir un certain nombre de connaissances en modélisation mécanique. J'ai notamment appris qu'il existait - contrairement à ce que l'on peut parfois penser en graphique - un certain nombre de méthodes, issues de la mécanique, permettant de faire de la simulation physique de manière "intelligente", sans passer nécessairement par des méthodes de simulation très coûteuses du type éléments finis. La mise en œuvre de telles approches permet d'atteindre un certain nombre d'objectifs visés en informatique graphique (modèles robustes, stables, efficaces, contrôlés par un jeu réduit de paramètres intuitifs, etc.), mais elles nécessitent de très bonnes connaissances en physique.

Dès lors, on pourrait se poser la question troublante de la place réellement occupée par l'informatique graphique dans le domaine de la simulation réaliste de phénomènes naturels, face à la modélisation mécanique. Je pense en réalité que les deux disciplines se rejoignent effectivement sur un certain nombre de points (bien évidemment pas tous, puisque la production d'images demeure la préoccupation principale de l'informatique graphique, tandis que la mécanique s'intéresse davantage à la mise en équations de phénomènes plutôt qu'à leur implémentation). Il me semble alors essentiel, lorsque l'on appartient à la communauté graphique et que l'on souhaite simuler un phénomène naturel, de se tourner sans *a priori* vers les modèles et techniques développés en mécanique, ne serait-ce que pour avoir une connaissance élargie de l'état de l'art, et, par exemple, dégager de cette étude un modèle de référence, validé, auquel on pourra comparer son propre modèle par la suite. Le rôle très spécifique du chercheur en informatique graphique va alors consister à adapter ce modèle, l'étendre, ou tout simplement s'en inspirer, pour concevoir un modèle cohérent avec les objectifs fixés (contrainte de temps réel, nécessité d'un contrôle par un animateur, intégration dans une plate-forme graphique existante, etc.). Par ailleurs, depuis les équations mécaniques jusqu'à la simulation numérique robuste et efficace du modèle correspondant, il existe, comme nous avons pu le constater dans la dernière partie de cette thèse, un vaste espace dans lequel la recherche, qu'elle provienne du graphique ou de la mécanique, a encore tout le loisir de s'exercer.

ANNEXE A

Courbes gauches et trièdre de Frenet

Le trièdre de Frenet, noté $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ sert à repérer une courbe gauche $\mathbf{\Gamma}(s)$, grâce à des critères géométriques (voir Figure A.1). Il est défini ainsi :

- $\mathbf{t}(s)$ est le vecteur tangent à la courbe au point d'abscisse s, orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes : $\mathbf{t}(s) = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial s}$.
- $\mathbf{n}(s)$ est le vecteur normal à $\mathbf{t}(s)$, appartenant au plan $\mathcal{P}$ osculateur à $\mathbf{\Gamma}$ au point d'abscisse s, et orienté vers la concavité de la courbe (normale principale), *i.e.* selon $\frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial s^2}$.
- $\mathbf{b}(s)$ est le vecteur binormal, résultant du produit vectoriel de $\mathbf{t}(s)$ par $\mathbf{n}(s)$.

NB : $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ sont contenus dans le plan normal à la courbe en $\mathbf{\Gamma}(s)$.

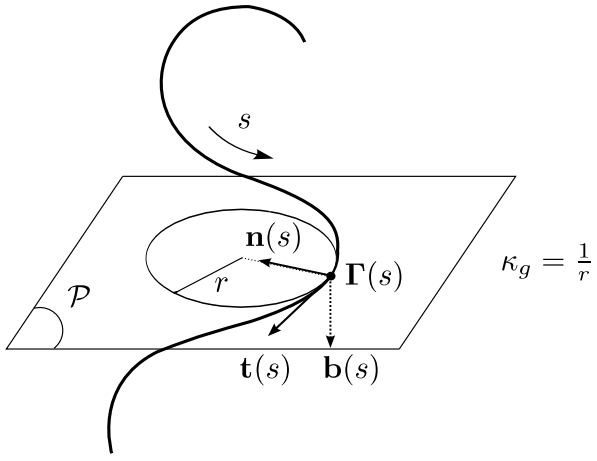


FIG. A.1: *Base de Frenet* $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ *et plan osculateur de la courbe* $\mathbf{\Gamma}(s)$ *au point d'abscisse s. La courbure locale* $\kappa_g(s)$ *est définie comme l'inverse du rayon du cercle osculateur en s.*

Tous les vecteurs de la base sont normalisés et on a les relations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_g \mathbf{n}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\tau_g \mathbf{n}$$

où κ_g est la courbure géométrique et τ_g la torsion géométrique de $\mathbf{\Gamma}$ au point d'abscisse s.

ANNEXE B

Elastica d'Euler

Nous nous proposons de traiter ici le cas simplifié d'une tige élastique statique à deux dimensions, dont l'extrémité en $s = 0$ est encastrée dans un support fixe (l'encastrement étant caractérisé par un angle $\theta(0) = \theta_0$ constant), et l'extrémité en $s = L$ est libre (voir Figure B.1). Nous supposerons que la tige est soumise uniquement à la gravité. Ce problème a été initialement étudié par Euler, comme mentionné dans [Ant95, AP07], et porte ainsi le nom d'*elastica d'Euler*.

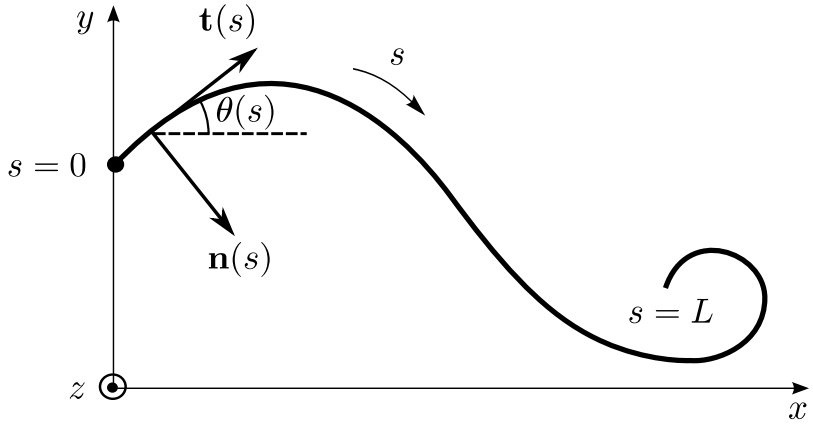


FIG. B.1: *Elastica d'Euler.*

Nous nous plaçons ici sous les hypothèses de Kirchhoff définies au Chapitre 5 (tige inextensible, sans cisaillement, de loi constitutive linéaire). Écrivons les équations d'équilibre d'un tel système, paramétré par l'angle $\theta(s)$ (ou, ce qui revient au même, par une seule courbure $\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$). Pour cela, Il suffit de prendre les dérivées temporelles nulles dans les équations (5.11) et (5.12). L'équilibre des forces et des moments s'écrit alors simplement :

$$\frac{d\mathbf{F_{int}}}{ds} = -\mathbf{P} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathbf{M_{int}}}{ds}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s) = \mathbf{0}. \tag{B.1}$$

Avec la condition $\mathbf{F_{int}}(L) = \mathbf{0}$ au bord libre $s = L$, la première équation permet de calculer la tension interne $\mathbf{F_{int}}$ directement :

$$\mathbf{F_{int}}(s) = \int_s^L \mathbf{P}(s')\,\mathrm{d}s'. \tag{B.2}$$

À deux dimensions, l'équation des moments n'a de composante non nulle que sur l'axe z, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}s}(s) + F_n = 0 \tag{B.3}$$

où $F_n = \mathbf{F_{int}} \cdot \mathbf{n}$ est la projection normale de la force interne, et $M_z = \mathbf{M_{int}} \cdot \mathbf{e_z}$ est l'unique composante non nulle du moment interne à la tige, dont l'expression est donnée par la loi linéaire Hookéenne :

$$M_z = EI\left(\kappa(s) - \kappa^0(s)\right)$$

où $\kappa^0(s)$ est la courbure naturelle de la tige. En remplaçant M_z par son expression dans (B.3), on en déduit donc l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}(s) = -\frac{F_n(s)}{EI} + \frac{\mathrm{d}\kappa^0}{\mathrm{d}s}(s). \tag{B.4}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre pour la fonction inconnue $\kappa(s)$, devant satisfaire la condition aux limites $\kappa(L) = \kappa^0(L)$. La force normale F_n inconnue va nous être donnée par l'équation (B.2). En effet, comme nous avons supposé que la force extérieure $\mathbf{P}$ était une constante (poids de la tige par unité de longueur), $\mathbf{F_{int}}$ peut alors s'intégrer de manière analytique :

$$\mathbf{F_{int}}(s) = (L-s)\,\mathbf{P} \qquad \text{d'où} \qquad F_n(s) = (L-s)\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}.$$

L'équation (B.4) se réécrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} = -\left(\frac{L-s}{EI}\right)\mathbf{P}\cdot\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}\kappa^0}{\mathrm{d}s}(s),$$

puis, en passant l'équation en variable θ (avec $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$) :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} = \left(\frac{L-s}{EI}\right)P\cos\theta + \frac{\mathrm{d}\kappa^0}{\mathrm{d}s}(s), \tag{B.5}$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{ds}(L) = \kappa^0(L).$$

Cette équation peut s'obtenir également par un bilan énergétique [AP07]. L'équation décrivant l'équilibre d'une tige est donc une équation différentielle ordinaire du second ordre, non linéaire (à cause du cosinus) et non autonome (à cause du $(L-s)$), avec des conditions aux deux bords. Elle n'admet pas de solution analytique. De plus, selon les différentes valeurs des paramètres P, L et θ_0, elle peut admettre plusieurs solutions voire pas de solution du tout. Par exemple, lorsque la tige est encastrée verticalement ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), la solution verticale $\theta(s) = \frac{\pi}{2}$ est stable jusqu'à un certain seuil de chargement (ou de longueur de tige), puis devient instable, et une autre solution stable, avec courbure non nulle, apparaît (bifurcation). Ce genre d'équation est très difficile à résoudre numériquement, et il est préférable d'effectuer une formulation de cette équation comme une minimisation d'énergie afin d'obtenir directement les positions d'équilibre stable de la tige. Plus de détails sont donnés dans [AP07].

ANNEXE C

Modèle Lagrangien à nombre de degrés de liberté réduit

Le formalisme Lagrangien offre un cadre théorique puissant pour la résolution de problèmes dynamiques portant sur des systèmes possédant des contraintes internes. Dans l'approche Lagrangienne, l'évolution d'un système est paramétrée, sous forme énergétique, par ses vrais degrés de liberté mécaniques, ce qui permet de s'affranchir des forces internes inconnues telles que les forces de liaison. Après une courte introduction sur la mécanique générale de Lagrange et sur le principe de moindre action, nous montrons que le formalisme Lagrangien permet très naturellement de réduire les degrés de liberté d'un système donné, et notamment de passer d'un système continu (nombre infini de degrés de liberté) à un système discret fini (nombre fini de degrés de liberté). Nous illustrerons toutes ces méthodes sur l'exemple simple d'une corde vibrante fixée en ses deux extrémités.

Pour comprendre les principes de la mécanique de Lagrange, et dresser ici une synthèse de cette approche, nous nous sommes appuyés sur des ouvrages de mécanique générale tels que [LL76], sur quelques cours de mécanique analytique disponibles sur Internet [Rai00, Fer02], ainsi que sur le chapitre de la thèse d'Olivier Nocent récapitulant les grandes lignes du formalisme Lagrangien [Noc01].

1 Formalisme de Lagrange

La mécanique de Newton est fondée sur les trois postulats suivants : 1) le principe d'inertie, selon lequel le mouvement d'un corps est rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen, 2) le principe fondamental de la dynamique reliant la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ du système à la somme des forces extérieures $\mathbf{F_{ext}}$ appliquées : $\mathbf{p} = \mathbf{F_{ext}}$, et 3) le principe de l'action et de la réaction. À l'aide de ces trois principes, la mécanique de Newton permet de résoudre de nombreux problèmes dynamiques, sans qu'il soit nécessaire de déployer un formalisme trop lourd. Cependant, les principes de Newton peuvent parfois s'avérer délicats à appliquer ; cela est vrai notamment dans le cas des systèmes matériels possédant des contraintes internes, qui limitent le mouvement du système et restreignent ainsi

ses degrés de liberté. Prenons par exemple le cas de deux pendules liés et contraints à se déplacer dans un plan (voir Figure C.1). Dans une approche classique de Newton, il faudrait associer des forces (inconnues) aux liaisons internes du système (tension des fils inextensibles, force de réaction du support commun) et résoudre ces inconnues en même temps que les variables dynamiques qui nous intéressent véritablement. Cela compliquerait bien sûr beaucoup la résolution, et ce de manière inutile : en effet ici on peut clairement identifier que les deux seuls degrés de liberté du système contraint sont les angles θ_1 et θ_2, et donc que ces deux paramètres, qu'on appellera *coordonnées généralisées* du système, suffisent à décrire complètement l'état mécanique du système.

La mécanique de Lagrange permet de s'affranchir des forces liées aux contraintes internes d'un système, en ne considérant que les vrais degrés de liberté du système, *i.e.* en se plaçant dans l'espace des mouvements réellement possibles pour le système contraint.

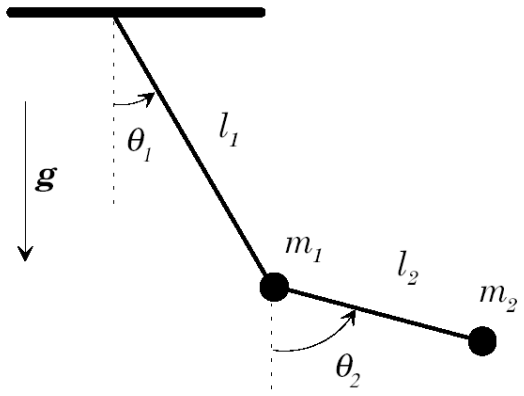


FIG. C.1: *Pendule double contraint à se déplacer dans le plan suivant les rotations d'angles* θ_1 *et* θ_2.

1.1 Coordonnées généralisées

Le *nombre de degrés de liberté* d'un système mécanique est le nombre de grandeurs indépendantes nécessaires et suffisantes pour déterminer de façon univoque la position du système. Comme nous l'avons vu plus haut, ces grandeurs ne correspondent pas forcément à des coordonnées cartésiennes de points du système, et selon le système étudié, un autre choix de coordonnées peut s'avérer plus commode. Pour un système à n degrés de liberté, on appellera ainsi *coordonnées généralisées* du système tout ensemble composé de n grandeurs quelconques $q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)$ (notées $\mathbf{q}(t)$ dans la suite) qui caractérisent complètement la position du système. Les dérivées $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_n(t)$ seront appelées *vitesses généralisées* du système (notées $\dot{\mathbf{q}}(t)$ dans la suite).

La donnée simultanée, à un instant t, des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées d'un système *déterminent complètement l'état mécanique* de ce système. Cela signifie que la valeur des accélérations $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, et donc l'évolution du système dans le temps, est définie de manière univoque par la donnée de $\mathbf{q}(t)$ et $\dot{\mathbf{q}}(t)$. Les relations $\ddot{\mathbf{q}}(t) = f(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}})(t)$ liant les accélérations aux positions et aux vitesses sont appelées *équations du mouvement* du système. Elles prennent la forme d'équations différentielles du second ordre en la variable $\mathbf{q}(t)$. L'intégration de ces équations permet ainsi de connaître les trajectoires du mouvement du système.

1.2 Principe de moindre action

La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est donnée par le *principe de moindre action* (ou *principe de Hamilton*). Selon ce principe, il existe une fonction

$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ appelée fonction de Lagrange ou *Lagrangien*, homogène à une énergie, qui est telle que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, dt$$

est extrémale pour la trajectoire effectivement suivie par le système de t_1 à t_2 entre $\mathbf{q}(t_1)$ et $\mathbf{q}(t_2)$, valeurs initiales et finales des coordonnées généralisées. L'intégrale S est appelée *action* du système.

1.3 Équations d'Euler-Lagrange

En écrivant que l'action S du système doit être extrémale entre les instants t_1 et t_2, on montre alors que le Lagrangien doit vérifier un système de n équations différentielles. Ces équations, appelées équations d'Euler-Lagrange (que nous ne démontrerons pas ici), s'écrivent :

$$\forall i \in [1..n] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Les n coordonnées généralisées indépendantes q_i peuvent donc être déterminées de manière unique par la donnée de ce système différentiel et d'un ensemble de conditions aux limites (fournissant au total $2n$ conditions indépendantes). Remarquons que les équations mécaniques ne changent pas lorsque le Lagrangien $\mathcal{L}$ est multiplié par une constante, cette liberté correspond seulement à un choix d'unités ($\mathcal{L}$ est homogène à une énergie). Notons également que dans le cas où le système considéré présente un nombre infini de coordonnées généralisées (infinité de degrés de liberté), les n équations ci-dessus s'écrivent comme une équation dépendant d'une variable continue. Nous allons écrire dans la suite les équations de Lagrange dans le cas d'un système continu (Section 1.5), puis d'un système discret (Section 2).

Dans le contexte de la mécanique Lagrangienne, le Lagrangien d'un système vaut généralement l'énergie cinétique $\mathcal{T}$ du système à laquelle on retire l'énergie potentielle $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors *équivalentes* aux équations du mouvement fournies par la mécanique de Newton.

1.4 Cas des forces non-conservatives

Le formalisme de Lagrange permet aussi de modéliser un système soumis à des forces *non-conservatives* (*i.e.*, des forces ne dérivant pas d'une énergie potentielle $\mathcal{U}$). On peut en effet associer à la force non-conservative totale $\mathbf{F_{nc}}$ appliquée au système une *force généralisée* Q_i qui est de la forme

$$Q_i = \int_V \mathbf{F_{nc}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\, \mathrm{d}V,$$

où $\mathbf{r}$ désigne la position d'un point quelconque du système, et où l'intégrale se calcule sur une longueur, une surface ou un volume selon la géométrie du système ($\mathbf{F_{nc}}$ désigne alors respectivement une force par unité de longueur, de surface et de volume). Dans le cas d'un système discret tel qu'un système de particules, où des forces s'exercent sur chaque particule de manière individuelle, l'expression précédente s'écrit comme une somme discrète.

Dans le cas où le système est soumis à des forces non-conservatives, on montre alors que les équations d'Euler-Lagrange peuvent s'écrire sous forme généralisée :

$$\forall i \in [1..n] \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}.$$

1.5 Exemple de la corde vibrante

Nous allons illustrer la méthode de Lagrange sur l'exemple d'un système dans le plan constitué d'une corde horizontale tendue, maintenue en ses extrémités par deux forces constantes et opposées que l'on notera respectivement $-\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$ (voir Figure C.2). La corde est supposée inextensible. Ce système, connu sous le nom de *corde vibrante*, peut par exemple servir à modéliser une corde de guitare.

Soit $s \in [0, L]$ l'abscisse curviligne de la corde, L étant la longueur de la corde. Comme la corde est tendue selon l'axe $\mathbf{e_x}$, on peut considérer que ses seuls mouvements possibles sont des petits déplacements selon l'axe $\mathbf{e_y}$. Ainsi, on choisit de paramétrer le système par la fonction $y(s)$ correspondant à de faibles déflexions de la corde en y (on aurait aussi pu choisir de paramétrer le système par l'angle $\theta(s)$ entre la tangente de la corde et l'axe $\mathbf{e_x}$, en chaque point de la corde).

Nous nous proposons d'écrire les équations mécaniques de ce système, d'une part en utilisant le principe fondamental de la dynamique de Newton, d'autre part en utilisant les équations de Lagrange. En utilisant les mêmes notations que pour les tiges de Kirchhoff définies au Chapitre 5, l'équation d'inextensibilité de la tige s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t}$$

où $\mathbf{r}(s)$ est la position $(x(s), y(s))$ de la corde à l'abscisse s et $\mathbf{t}(s)$ le vecteur tangent à la corde en s, supposé unitaire.

L'angle de déflexion de la corde θ sera supposé faible : $\theta \simeq 0$. De plus, on négligera dans ce problème l'effet de la gravité et de toute autre force extérieure à la tige, mises à part les tensions appliquées aux deux extrémités.

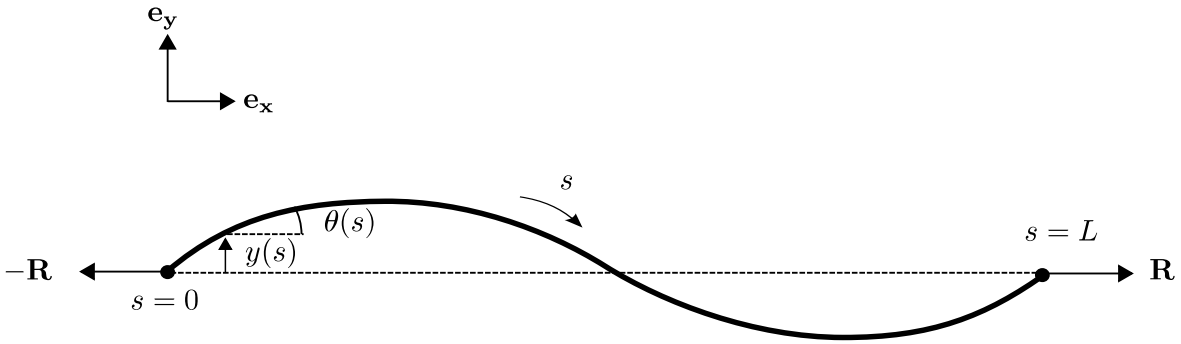


FIG. C.2: *Principe de la corde vibrante : corde maintenue pratiquement tendue par des forces appliquées en ses deux extrémités, et soumise à de faibles déflexions selon l'axe transverse y.*

Résolution par la dynamique de Newton

Si l'on néglige la force répartie de pesanteur ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$), le bilan des forces et le bilan des moments sur une portion infinitésimale de tige, donnés par les équations (5.11) et (5.12), s'écrivent

$$\rho S \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{M_{int}}}{\partial s}(s) + \mathbf{t} \wedge \mathbf{F_{int}} = 0,$$

où $\mathbf{F_{int}}$ est la force interne de la tige transmise à travers une section, qui est une inconnue du problème. Nous prenons, comme au Chapitre 5 et en Annexe B, une loi de comportement linéaire Hookéenne pour le matériau constituant la tige, $\mathbf{M_{int}} = EI \frac{\partial \theta}{\partial s} \mathbf{e_z}$, où l'on a choisi une courbure naturelle nulle le long de la tige.

On cherche à écrire les équations précédentes en fonction de la déflexion $y(s) = \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{e_y}$. L'équation d'inextensibilité projetée sur les axes $\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{e_y}$ donne

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e_x} = \cos\theta \simeq 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e_y} = \sin\theta \simeq \theta.$$

Cela permet d'intégrer simplement la fonction $x(s)$: $x(s) = s + C^{te}$, et nous donne la relation :

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \theta. \tag{C.1}$$

Projetons le bilan des forces sur l'axe $\mathbf{e_x}$. On obtient $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e_x} = \ddot{x} = \ddot{s} = 0$, car on suppose qu'il n'y a pas de variation longitudinale de la corde au cours du temps. On en déduit

$$\frac{\partial F_x}{\partial s} = 0 \qquad \text{puis} \qquad F_x = C^{te},$$

où l'on a noté $F_x = \mathbf{F_{int}} \cdot \mathbf{e_x}$ et $F_y = \mathbf{F_{int}} \cdot \mathbf{e_y}$ On a la condition aux limites suivante : $F_x(s = L) = R_x = R$, ce qui donne finalement :

$$F_x = R.$$

Projetons maintenant le bilan des forces sur l'axe $\mathbf{e_y}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e_y} = \ddot{y} \qquad \text{d'où} \qquad \rho S \ddot{y} = \frac{\partial F_y}{\partial s}. \tag{C.2}$$

Cette équation fait apparaître les deux inconnues y et F_y. On cherche désormais à éliminer l'inconnue F_y. Ceci est possible grâce à l'équation des moments, qui est non nulle sur l'axe $\mathbf{e_z}$ et dont la projection sur cet axe donne

$$\frac{\partial M_z}{\partial s} + t_x F_y - t_y F_x = 0$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}(s) + \cos\theta F_y - \sin\theta R = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + F_y - \frac{\partial y}{\partial s} R = 0, \tag{C.3}$$

d'après les équations d'inextensibilité et de faible déflexion. En tirant F_y de C.3 et en remplaçant dans C.2 on a :

$$\rho S \ddot{y} = R \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4}.$$

En supposant EI faible (pas de module en flexion), on retrouve les équations des ondes du type :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial s}.$$

Ces équations admettent une solution oscillante, que l'on peut exprimer grâce à une décomposition en série de Fourier.

Résolution par la dynamique de Lagrange

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle de la coordonnée généralisée y, qui s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U},$$

où $\mathcal{T}$ est l'énergie cinétique du système, et $\mathcal{U}$ est l'énergie potentielle.

Les équations d'Euler-Lagrange donnent l'évolution du système mécanique dans le temps (équivalentes au principe fondamental de la dynamique précédemment appliqué) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}.$$

Calculons $\mathcal{L}$ pour notre système en fonction de y, en commençant par le calcul de $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\rho S \int_0^L \dot{y}^2 \,\mathrm{d}s.$$

Calculons maintenant $\mathcal{U}$. Les forces extérieures appliquées sur la corde sont uniquement les forces horizontales $\mathbf{R}$ et $-\mathbf{R}$, appliquées respectivement à l'extrémité droite et gauche de la corde. Ces forces sont constantes donc conservatives. Calculons le travail élémentaire associé à chacune de ces forces :

$$\delta W_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\delta\ell}$$

où $\boldsymbol{\delta\ell}$, est un déplacement élémentaire du point à l'extrémité de la corde.

La force $\mathbf{R}$ ne travaille que selon l'axe $\mathbf{e_x}$ donc

$$\delta W_{\mathbf{R}} = R\,\delta x_L.$$

De même on calcule $\delta W_{-\mathbf{R}} = -R\,\delta x_0 = 0$ avec la convention $\delta x_0 = 0$.

Les forces $\mathbf{R}$ et $-\mathbf{R}$ sont conservatives et l'énergie potentielle $\mathcal{U}_{\mathbf{R}}$ associée est donc

$$d\,\mathcal{U}_{\mathbf{R}} = -\delta W = -R\,\delta x_L, \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{U}_{\mathbf{R}} = -R x_L + C^{te}.$$

En choisissant $\mathcal{U} = 0$ en $x_L = L$, on en déduit la constante d'intégration, ce qui donne l'expression

$$\mathcal{U}_{\mathbf{R}} = -R\,(x_L - L).$$

Calculons x_L. Si, comme précédemment, on fait l'approximation au premier ordre $x = s$, on obtient un travail nul de la force, ce qui n'est pas satisfaisant ici (c'était suffisant dans le cas précédent). On va donc faire une approximation de x au second ordre (*i.e.* on autorise un léger déplacement de la corde en x). Si l'on reprend les équations d'inextensibilité, cela donne :

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{e_y} = \sin\theta \simeq \theta \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{e_x} = \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Alors,

$$x_L = \int_0^L \frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s = \int_0^L 1 - \frac{\theta^2}{2}\mathrm{d}s = L - \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

On a donc l'énergie potentielle $\mathcal{U}_{\mathbf{R}}$ relative à $\mathbf{R}$ qui s'écrit :

$$\mathcal{U}_{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}R\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

Il faut aussi prendre en compte l'énergie potentielle élastique interne à la corde, due à la force interne $\mathbf{F_{int}}$ (pour l'instant on ne néglige pas le module en flexion EI). Cette énergie s'écrit :

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F_{int}}} = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

Alors l'énergie potentielle totale s'écrit

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathbf{R}} + \mathcal{U}_{\mathbf{F_{int}}} = \frac{1}{2}R\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s + \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 \mathrm{d}s,$$

puis le Lagrangien $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}S\int_0^L \dot{y}^2\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}R\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s - \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

Calculons maintenant les termes $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}$ et $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}$. On a par définition de la fonctionnelle $\mathcal{L}$ (dépendant de la fonction $y(s)$, *i.e.*, d'une infinité de degrés de liberté) :

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^L \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\delta\dot{y}\right)\mathrm{d}s. \tag{C.4}$$

La différentielle $\delta\mathcal{L}$ s'évalue pour une petite perturbation δy :

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(y+\delta y) - \mathcal{L}(y) = \mathcal{T}(y+\delta y) - \mathcal{T}(y) - \left(\mathcal{U}(y+\delta y) - \mathcal{U}(y)\right).$$

Calculons les différentielles $\delta\mathcal{T}$ et $\delta\mathcal{U}$:

$$\delta\mathcal{T} = \mathcal{T}(y+\delta y) - \mathcal{T}(y) = \rho S\int_0^L \dot{y}\frac{\partial(\delta y)}{\partial t}\mathrm{d}s = \rho S\int_0^L \dot{y}\,\delta\dot{y}\mathrm{d}s$$

$$\text{et}\quad \delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(y+\delta y) - \mathcal{U}(y) = R\int_0^L \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\delta y)}{\partial s}\mathrm{d}s + EI\int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial^2(\delta y)}{\partial s^2}\mathrm{d}s.$$

Dans cette expression, on fait sortir le terme en δy en intégrant par partie une fois le premier terme (signe $-$), et deux fois le deuxième terme (signe $+$). Cela donne :

$$\delta\mathcal{U} = C^{te} - R\int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\delta y\mathrm{d}s + EI\int_0^L \frac{\partial^4 y}{\partial s^4}\delta y\mathrm{d}s.$$

On a alors

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^L \left(\rho S\dot{y}\,\delta\dot{y} - (R\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial s^4})\,\delta y\right)\mathrm{d}s + C^{te},$$

et par identification avec l'expression (C.4),

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = R\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial s^4} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = \rho S\dot{y}.$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient ainsi

$$\rho S\ddot{y} = R\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial s^4},$$

qui est bien sûr la même équation que celle obtenue par la dynamique de Newton.

2 Discrétisation d'un modèle Lagrangien

Dans la méthode précédente, le Lagrangien $\mathcal{L}$ était une fonctionnelle, qui dépendait de la fonction continue $y(s)$ (prenant une infinité de valeur pour $s \in [0,L]$). La méthode Lagrangienne discrète consiste à réduire l'ensemble des valeurs prises par $y(s)$ à un nombre discret de valeurs y_i, et donc à considérer le Lagrangien comme une fonction dépendant non plus d'une infinité de degrés de liberté, mais des n degrés de liberté y_i :

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right). \tag{C.5}$$

Tout revient maintenant à choisir correctement les y_i. Le système physique correspondant n'existe pas forcément dans la réalité, mais il aura toutes les propriétés physiques souhaitées (notamment la conservation de son énergie).

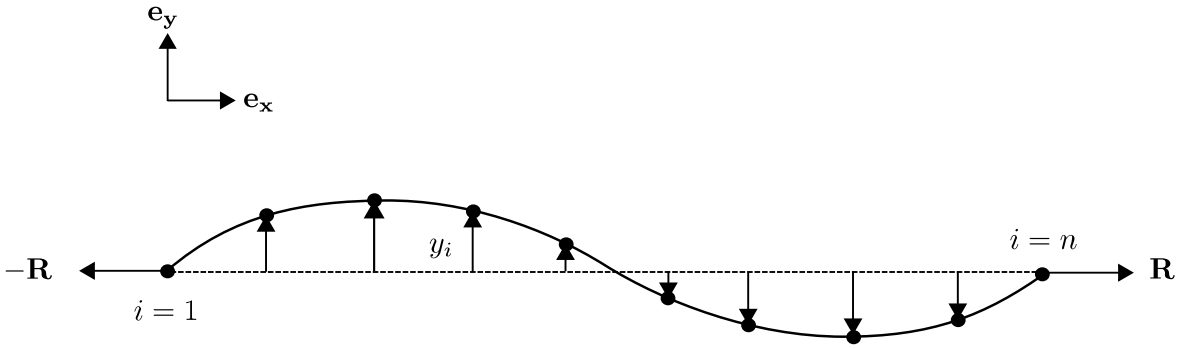


FIG. C.3: *Système de corde vibrante discrète, à nombre fini de degrés de liberté y_i.*

On peut par exemple choisir comme y_i les déflexions des points s_i de la corde, régulièrement espacées d'une longueur ΔL. Ce modèle correspond à une corde physique tendue qui serait contrainte à passer dans n anneaux régulièrement espacés selon l'axe **x**, et mobiles selon l'axe **y**. Les y_i correspondent alors aux vrais degrés de liberté de ce système physique.

Calculons les énergies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ les énergies cinétiques et potentielles pour ce nouveau système dynamique discret. Par analogie avec les énergies continues calculées précédemment, on peut par exemple proposer les énergies suivantes (pour simplifier, on néglige le module EI en flexion, et donc l'énergie élastique interne à la corde) :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho S \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i^2 \Delta L \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U} = \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta L} \right)^2 \Delta L.$$

Pour une petite variation de chaque degré de liberté $\forall i, y_i + \delta y_i$, on a :

$$\delta\mathcal{T} = \rho S \sum_{0}^{L} \dot{y}_i \delta \dot{y}_i \Delta L.$$

$$\delta\mathcal{U} = R \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - y_{i+1} - y_{i-1}}{\Delta L} \right) \delta y_i.$$

Par identification avec l'expression de $\delta\mathcal{L}$ en (C.5), cela donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} = R \frac{y_{i+1} - y_i + y_{i-1}}{\Delta L} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} = \rho S \dot{y}_i \Delta L.$$

Et en remplaçant dans les équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall i, \qquad \rho S \ddot{y}_i = R \frac{y_{i+1} - y_i + y_{i-1}}{(\Delta L)^2},$$

où l'on reconnaît un Laplacien discret dans le membre de droite.

Ce système est garanti de conserver son énergie, puisqu'il obéit aux équations d'Euler-Lagrange. Ainsi, la méthode Lagrangienne permet assez naturellement de réduire les degrés de liberté d'un système continu, et d'écrire des équations physiques discrètes cohérentes pour un tel système.

ANNEXE D

Processus de reconstruction d'une Super-Hélice

Nous nous proposons dans cette annexe de montrer comment il est possible de calculer analytiquement la forme d'une tige de Kirchhoff à courbures et torsion *constantes*.

Lemme D.1 *Soit* $\mathbf{\Psi}$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *constant, et* $\mathbf{f}$ *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^3$*, solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{\partial \mathbf{f}(s)}{\partial s} = \mathbf{\Psi} \wedge \mathbf{f}(s) \tag{D.1}$$

Alors le vecteur $\mathbf{f}(s)$ *tourne à la vitesse constante* $\|\mathbf{\Psi}\|$ *autour de l'axe* $\mathbf{\Psi}$*.*

Preuve :

L'équation (D.1) est vectorielle de dimension 3, linéaire (car l'opérateur $\wedge$ est linéaire), et du premier ordre. L'ensemble des solutions admissibles est donc un espace vectoriel de dimension 3. Exhibons une base pour cet espace des solutions. Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, telles que $\forall s\,(\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{\Psi})$ est une base orthogonale directe, et les vecteurs $\mathbf{a}(s)$ et $\mathbf{b}(s)$ sont obtenus par rotation des vecteurs fixes $\mathbf{a}(0)$ et $\mathbf{b}(0)$ autour de l'axe $\mathbf{\Psi}$, d'angle $\|\mathbf{\Psi}\|\, s$. Les vecteurs $\mathbf{a}(s)$ et $\mathbf{b}(s)$ tournent donc autour de $\mathbf{\Psi}$ à la vitesse constante $\|\mathbf{\Psi}\|$.

Il est aisé de voir que chacun des vecteurs de la base tournante $(\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{\Psi})$ vérifie bien l'équation (D.1) (voir Schéma). Cette base constitue donc un système fondamental de solutions pour (D.1), et la solution générale de (D.1) peut s'écrire :

$$\mathbf{f}(s) = \alpha\,\mathbf{a}(s) + \beta\,\mathbf{b}(s) + \gamma\mathbf{\Psi} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Le vecteur $\mathbf{f}(s)$ est donc fixe dans la base tournante $(\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{\Psi})$, ce qui signifie qu'il tourne à la vitesse constante $\|\mathbf{\Psi}\|$ autour de l'axe fixe $\mathbf{\Psi}$.

□

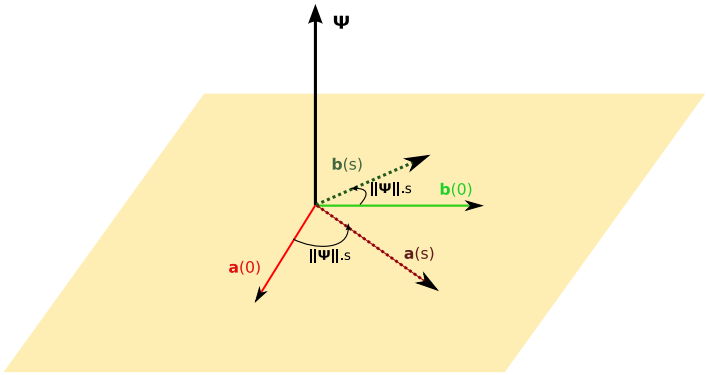


FIG. D.1: *Rotation à vitesse constante autour de* $\mathbf{\Psi}$ *de la base* $(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Propriété D.1 *Si* κ_1, κ_2 *et* τ *sont constantes le long de la tige de Cosserat (*ie. *indépendantes de s), alors la configuration de la courbe moyenne* $\mathbf{r}$ *de la tige est une* hélice.

Preuve :

Soient κ_1, κ_2 et τ supposées constantes le long de la tige. Alors le vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ est constant le long de la tige. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial s} &= \kappa_1 \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial s} + \kappa_2 \frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial s} + \tau \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \\ &= \kappa_1 (\tau \mathbf{n}_2 - \kappa_2 \mathbf{t}) + \kappa_2 (-\tau \mathbf{n}_1 + \kappa_1 \mathbf{t}) + \tau (\kappa_2 \mathbf{n}_1 - \kappa_1 \mathbf{n}_2) \text{ par (5.9)} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Cela signifie, d'après le lemme D.1, que le long de la tige, chaque vecteur $\mathbf{u}_i$ du repère matériel $\mathcal{F}$ tourne à vitesse constante autour de $\mathbf{\Omega}$, qui est fixe.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas particulier où $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Alors l'équation cinématique pour $\mathbf{t}$ devient $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \mathbf{0}$, et donc par intégration : $\mathbf{t}(s) = C^{te} = \mathbf{t}(0)$. On calcule la configuration $\mathbf{r}(s)$ de la courbe par intégration de $\mathbf{t}(s)$, ce qui donne $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{t}(0)\, s$. La tige est donc rectiligne (hélice dégénérée), de direction $\mathbf{t}(0)$.

Désormais, $\kappa_1 \neq 0$ et $\kappa_2 \neq 0$. Posons $\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$. La composante longitudinale selon $\mathbf{\Omega}$ de chaque vecteur $\mathbf{u}_i$ est constante, tandis que la composante transverse de chaque $\mathbf{u}_i$ tourne à vitesse constante dans le plan normal à $\mathbf{\Omega}$. En particulier, l'expression analytique de $\mathbf{t}(s)$ est donnée par la rotation de $\mathbf{t}(0) = \mathbf{t}_0$ autour de $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0^{/\!/} + \mathbf{t}_0^{\perp} \cos(\Omega s) + \frac{\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{t}_0^{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega s), \tag{D.2}$$

où $\mathbf{t}_0^{/\!/}$ et $\mathbf{t}_0^{\perp}$ sont les décompositions axiales et normales respectivement par rapport au vecteur $\frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega}$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_0^{/\!/} &= (\mathbf{t}_0 \cdot \boldsymbol{\omega})\, \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{t}_0^{\perp} &= \mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_0^{/\!/} \end{cases}$$

où l'on a posé $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega}$.

Pour trouver la configuration $\mathbf{r}(s)$ de la tige, il suffit d'intégrer l'équation (D.4) :

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{t}_0^{/\!/}\, s + \mathbf{t}_0^{\perp} \frac{\sin(\Omega s)}{\Omega} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{t}_0^{\perp} \frac{1 - \cos(\Omega s)}{\Omega^2}. \tag{D.3}$$

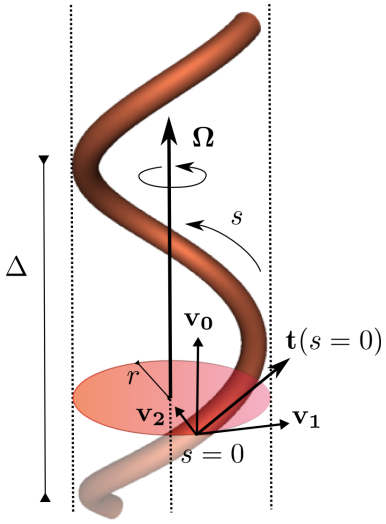


FIG. D.2: *Une tige de Kirchhoff caractérisée par des courbures et torsion* $(\kappa_i)_{i=1,2,3}$ *constantes prend la forme d'une hélice circulaire, de rayon r et de pas* Δ*. Le vecteur de Darboux* $\mathbf{\Omega}$*, constant dans ce cas, permet de définir une base* $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ *adaptée à la tige [AP07]*

En écrivant les composantes axiales et normales de $\mathbf{r}(s)$,

$$\begin{cases} (\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(0))^{/\!/} & = \mathbf{t}_0^{/\!/}\, s \\ (\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(0))^{\perp} & = \frac{\mathbf{t}_0^{\perp}}{\Omega}\sin(\Omega s) - \mathbf{\Omega}\wedge\frac{\mathbf{t}_0^{\perp}}{\Omega^2}\cos(\Omega s) + C^{te}, \end{cases}$$

on remarque que la première composante suit un mouvement uniforme le long de l'axe, tandis que la seconde composante tourne à vitesse constante autour de $\mathbf{\Omega}$, car les deux vecteurs apparaissant devant les termes en sinus et cosinus ont même norme. L'équation de $\mathbf{r}$ est donc bien celle d'une hélice circulaire, d'axe parallèle à $\mathbf{\Omega}$.

□

Audoly et Pomeau [AP07] ont montré plus précisément qu'il existait une base orthonormée $\{\mathbf{v}_i\}$ *adaptée* à la tige de courbures et torsion constantes, grâce à laquelle on peut exprimer simplement les quantités $\mathbf{t}_0^{/\!/}$ et $\mathbf{t}_0^{\perp}$. On obtient alors les expressions analytiques suivantes pour $\mathbf{t}(s)$ et $\mathbf{r}(s)$:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\tau}{\Omega}\mathbf{v}_0 + \frac{\kappa}{\Omega}\cos(\Omega s)\,\mathbf{v}_1 + \frac{\kappa}{\Omega}\sin(\Omega s)\,\mathbf{v}_2. \tag{D.4}$$

$$\text{et} \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \left(\frac{\tau}{\Omega}\mathbf{v}_0\right) s + \left(\frac{\kappa}{\Omega}\mathbf{v}_1\right)\frac{\sin(\Omega s)}{\Omega}) + \left(\frac{\kappa}{\Omega}\mathbf{v}_2\right)\frac{1-\cos(\Omega s)}{\Omega}. \tag{D.5}$$

On en déduit que l'hélice formée par $\mathbf{r}$ a pour pas $\Delta = 2\pi\left(\frac{\tau}{\Omega^2}\right)$. De plus, sa projection sur le repère plan $(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est un cercle de rayon $r = \frac{\kappa}{\Omega^2}$, centré en $(0, \frac{\kappa}{\Omega^2})$ (ce cercle passe donc par $\mathbf{r}(0)$, comme indiqué sur la Figure D.2).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **7**
1 Motivations et enjeux . . . 7
2 Cadre de la thèse et objectifs . . . 11
3 Organisation du document . . . 13

Notations **15**

I État de l'art **17**

1 Cheveux : du réel au numérique **19**
1 La nature des cheveux . . . 20
1.1 Les différents types de cheveux dans le monde . . . 20
1.2 Répartition des cheveux sur le crâne . . . 21
1.3 Structure d'un cheveu . . . 22
1.4 Croissance et cycle pilaire . . . 24
1.5 Propriétés physiques du cheveu . . . 25
2 Cosmétologie : soin et traitements du cheveu . . . 30
2.1 L'industrie cosmétique . . . 31
2.2 Métrologie capillaire . . . 32
2.3 Conclusion . . . 35
3 Précédents modèles numériques . . . 37
3.1 Modélisation de coiffures . . . 37
3.2 Animation de chevelures . . . 47
3.3 Rendu de cheveux . . . 55
4 Bilan . . . 61

2 Modèles pour la simulation physique **63**
1 Problématiques . . . 63
2 Discrétisation spatiale . . . 64

2.1 Modèles à base de particules . . . 65
2.2 Modèle masses-ressorts . . . 65
2.3 Système de particules . . . 66
2.4 Modèle SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) . . . 66
2.5 Approches nodales . . . 67
2.6 Systèmes déformables réduits . . . 68
2.7 Récapitulation . . . 71
3 Résolution numérique (en temps) . . . 72
3.1 Schéma numérique : définition . . . 72
3.2 Précision . . . 72
3.3 Stabilité . . . 73
4 Gestion des contraintes . . . 73
4.1 Détection de collisions . . . 74
4.2 Réponse à la collision . . . 74
5 Bilan . . . 75

II Simulation interactive de chevelures 77

3 Modèle adaptatif de chevelure pour l'animation 81
1 Simulation adaptative . . . 82
2 Vue d'ensemble de la méthode . . . 83
3 Arbre adaptatif de mèches (AAM) . . . 84
3.1 Géométrie multirésolution de la chevelure . . . 84
3.2 Structure mécanique multiresolution . . . 85
3.3 Animation . . . 86
4 Subdivisions et fusions adaptatives . . . 89
4.1 Subdivision . . . 89
4.2 Fusion . . . 90
5 Gestion des interactions . . . 91
5.1 Interaction entre la chevelure et le corps . . . 92
5.2 Gestion des collisions entre mèches . . . 92
6 Résultats et discussion . . . 94
7 Bilan . . . 95

4 Représentation volumique de la chevelure pour le rendu 97
1 Contexte . . . 98
1.1 Animation et rendu interactifs de cheveux . . . 98
1.2 Cartes d'ombre 2D et rendu volumique . . . 98
1.3 Vue d'ensemble de la méthode . . . 99
2 Carte d'ombre 3D orientée selon la lumière . . . 100
2.1 Repère local orienté selon la direction de la lumière . . . 100
2.2 De l'espace objet à l'espace de la carte d'ombre . . . 100
3 Algorithme d'auto-ombrage . . . 102
3.1 Calcul de la carte de densité . . . 102
3.2 Calcul de la transmittance . . . 103
3.3 Filtrage et composition des couleurs . . . 104
4 Extensions . . . 105

4.1 Gestion des interactions mécaniques de la chevelure . . . 105
4.2 Parallélisation de l'algorithme . . . 106
5 Résultats et discussion . . . 107
5.1 Rendu de chevelures statiques . . . 107
5.2 Rendu de chevelures dynamiques . . . 108
6 Bilan . . . 109

III Simulation réaliste de chevelures 111

5 Tige de Kirchhoff et modèle de Super-Hélice 115
1 Modèles précédents de fils . . . 116
1.1 Modèle paramétrique modal . . . 116
1.2 Modèle Lagrangien de spline matérielle 3D . . . 117
1.3 Modèle de Cosserat . . . 118
2 Tige de Cosserat . . . 118
2.1 Définition générale . . . 118
2.2 Hypothèses de tige inextensible et sans cisaillement . . . 120
2.3 Section elliptique de la tige . . . 120
2.4 Repère matériel *vs.* repère de Frenet . . . 121
3 Équations de Kirchhoff . . . 123
3.1 Équations cinématiques . . . 123
3.2 Équations dynamiques . . . 124
3.3 Configuration de la tige au repos . . . 127
3.4 Loi de comportement du matériau . . . 127
3.5 Conditions aux limites . . . 128
4 Méthodes pour la résolution numérique . . . 128
4.1 Choix d'une paramétrisation appropriée . . . 129
4.2 Discrétisation spatiale : modèle de Super-Hélice . . . 130
5 Bilan . . . 132

6 Simulation statique de chevelures 133
1 Modèle statique d'un cheveu unique . . . 134
1.1 Énergie potentielle . . . 135
1.2 Résolution numérique . . . 136
1.3 Analyse et validation . . . 138
2 Modélisation d'une coiffure complète . . . 142
2.1 Plantation des cheveux et répartition en mèches . . . 142
2.2 Gestion des contacts . . . 144
2.3 Outils d'édition de coiffure . . . 145
2.4 Rendu d'une chevelure . . . 147
3 Résultats et validation . . . 148
3.1 Pousse de cheveux . . . 148
3.2 Génération de formes naturelles de chevelure . . . 149
4 Bilan . . . 150

7 Simulation dynamique de chevelures **151**
1 Méthodologie suivie . . . 152
2 Échec de l'approche nodale . . . 153
3 Super-Hélices dynamiques . . . 154
3.1 Paramètres indépendants . . . 155
3.2 Équations dynamiques pour une Super-Hélice . . . 155
3.3 Calcul formel des termes cinématiques à chaque pas de temps . . . 156
3.4 Discrétisation en temps . . . 158
4 Modélisation d'une assemblée de cheveux . . . 160
4.1 Simulation par cheveux guide . . . 160
4.2 Interactions . . . 160
4.3 Génération de la géométrie des cheveux à partir des cheveux guide . . . 163
5 Validation et résultats . . . 165
5.1 Choix des paramètres du modèle . . . 166
5.2 Comparaisons visuelles . . . 169
5.3 Résultats finaux et performances . . . 170
5.4 Limitations . . . 171
6 Bilan . . . 172

Conclusion **173**
Résumé des contributions . . . 173
Travaux futurs . . . 174
Réflexion et bilan . . . 176

A Courbes gauches et trièdre de Frenet **179**

B Elastica d'Euler **181**

C Modèle Lagrangien à nombre de degrés de liberté réduit **183**
1 Formalisme de Lagrange . . . 183
1.1 Coordonnées généralisées . . . 184
1.2 Principe de moindre action . . . 184
1.3 Équations d'Euler-Lagrange . . . 185
1.4 Cas des forces non-conservatives . . . 185
1.5 Exemple de la corde vibrante . . . 186
2 Discrétisation d'un modèle Lagrangien . . . 190

D Processus de reconstruction d'une Super-Hélice **193**

Table des matières **197**

Table des figures **201**

Bibliographie **211**

TABLE DES FIGURES

1 *Célébration de la chevelure humaine à travers les époques, dans la peinture et le dessin. De gauche à droite et de haut en bas : 1) "le prince aux fleurs de Lys", fresque crétoise datant de 1500 ans av. J.C. 2) Détail de "la naissance de Vénus" de Boticelli, peinture sur toile (1485). 3) "Cheveux d'or", d'Emmanuel Garant, huile sur toile (années 90). 4) Extrait de la bande dessinée "Les passagers du vent" de Bourgeon (années 80). 5) Dessin de "Pocahontas" extrait du dessin animé des studios Walt Disney (1995). 6) Ichika, personnage du manga japonais animé Uta Kata (années 2000).* 8

2 *La chevelure comme témoin de la société. De gauche à droite : 1) Perruque du XVI^{e} siècle (peinture Versailles). 2) La coupe à la garçonne, mise à la mode par Louise Brooks en 1929, et signe précurseur du mouvement féministe. 3) Le blond platine, couleur de star et éternel symbole de séduction chez la femme. 4) Cheveux longs des hippies dans les années 70. 5) De nos jours, la mode du crâne rasé sévit chez les sportifs et certains acteurs masculins (comme ici Brad Pitt, dans Ocean 12).* 9

3 *Impact d'une coiffure sur l'apparence globale d'un visage (©Stellure Studio).* 9

4 *Nombre de publications sur la synthèse de cheveux en informatique graphique, par an.* . . . 10

5 *Chevelures de synthèse apparues récemment sur les grands écrans. De gauche à droite : extraits de Final Fantasy (2000), Shrek (2001), Kaena, la prophétie (2003), les Indestructibles (2005).* 11

1.1 *Les trois grands types de cheveux dans le monde. De gauche à droite : cheveux asiatiques, cheveux caucasiens et cheveux africains. Pour chaque catégorie est donnée une vue transversale d'un cheveu (grossi environ 400 fois), une vue des cheveux en coupe, et l'implantation des cheveux sur le cuir chevelu (©L'Oréal).* 20

1.2 *Motifs capillaires. De gauche à droite : 1) Motifs en forme de spirale issue du vertex, chez un jeune enfant. 2) Mêmes motifs sur des cheveux plus longs (©J. Gray). 3) Motifs sur le front, causant l'apparition d'une mèche rebelle.* 22

1.3 *Schéma d'un follicule pilo-sébacé (©Idé pour I-marginal).* 23

1.4 *Structure du cheveu, observée au microscope électronique à balayage, à divers grossissements. De gauche à droite : 1) Pousse des cheveux sur le cuir chevelu (image extraite de [Gra97], grossissement* $\times 100$*). 2) Structure de la cuticule en écailles d'un cheveu, orientée comme sur l'image de gauche : la pointe est dirigée vers le haut (image extraite de [Rob02], grossissement* $\times 1000$*). 3) Vue en coupe du cortex et de la mœlle (au centre) d'un cheveu (©L'Oréal, grossissement* $\times 1000$*).* 24

1.5 *Les différentes phases du cycle pilaire (figure tirée de [Gra97]).* 25

1.6 *Solidité remarquable du cheveu, conférée par les propriétés de la kératine. De gauche à droite : 1) Illustration du conte Rapunzel des frères Grimm, dans lequel une jeune fille enfermée au sommet d'une tour peut recevoir la visite de son bien-aimé grâce à sa longue chevelure blonde, qui sert de corde. 2) Publicité Garnier vantant la résistance des cheveux (©Garnier). 3) Mesure des propriétés mécaniques du cheveu par extensiométrie (©L'Oréal).* 26

1.7 *Contrainte exercée en traction sur le cheveu en fonction de sa déformation [FHB*$^+$*03]. Trois courbes ont été obtenues, pour les trois types de cheveu : asiatique, caucasien et africain. Le cheveu asiatique montre une plus grande résistance à la traction que les autres cheveux, tandis que le cheveu africain, très fragile, présente un point de rupture très vite atteint, probablement à cause des vrilles localisées de ce type de cheveu. Le module d'Young du cheveu est la pente de la courbe en zone élastique linéaire. Le cheveu caucasien a en moyenne un module d'Young plus élevé que les deux autres groupes ethniques.* 27

1.8 *Mise en évidence du comportement non linéaire des cheveux. À gauche : flambage d'une mèche de cheveux par des oscillations verticales. À droite : mèche de cheveu soumise à deux forces opposées axiales croissantes (a), provoquant tout d'abord une instabilité en flexion (b) puis en torsion (c).* 27

1.9 *Modèle optique d'un cheveu, proposé à l'origine par [SGF77], puis repris par divers travaux en physique du cheveu [GGL87], et récemment en informatique graphique [MJC*$^+$*03]. Image tirée de [MJC*$^+$*03].* 28

1.10 *Évolution des paramètres géométriques et mécaniques du cheveu en fonction de l'humidité relative ambiante [Zvi86, BW05] : a) reprise en eau du cheveu ; b) augmentation de sa longueur et de son diamètre ; c) diminution des modules d'élasticité en traction (module d'Young), en flexion et en torsion (©L'Oréal).* 30

1.11 *Comparaison entre des cheveux réels secs, et les mêmes cheveux mouillés (images tirées de [Gra97]).* 31

1.12 *Répartition en 2004 des parts de marché de L'Oréal, par métier (source :* http ://www.loreal-finance.com) 31

1.13 *Discipline et nervosité des cheveux : a) mèche de cheveux raides ayant une bonne discipline ; mèche de cheveux frisés ayant (b) une bonne et (c) une mauvaise discipline ; d) et e) illustrent la nervosité d'une mèche bouclée, propriété qui traduit l'élasticité de la mèche (une mèche "nerveuse" se comporte comme un ressort) (©L'Oréal). Notons que la mèche bouclée en d) présente aussi une très bonne discipline, car les cheveux sont parfaitement alignés les uns par rapport aux autres.* 33

1.14 *État de surface des cheveux, évalué à partir d'observations au microscope à balayage, ou à l'aide d'un vidéo-microscope. De haut en bas et de gauche à droite : 1) Cheveu caucasien présentant un bon état de surface. 2) Cheveux africains elliptiques enchevêtrés. 3) Cheveu africain très elliptique et présentant une torsion très marquée sur toute sa longueur. 4) Usure du cheveu, causant une atteinte croissante de la cuticule de la racine vers la pointe, jusqu'à éclatement et division du cortex [AMB01] (©L'Oréal). 5) Fourche visualisée au vidéo-microscope. 6) Nœud, souvent présent dans la coiffure africaine, qui fragilise le cheveu et peut provoquer sa rupture [Gra97]. 7) Destruction de la cuticule par des permanentes répétées et excessives [Gra97]. 8) Destruction de la cuticule par brossage à rebrousse-poil (crêpage) [Gra97].* 34

1.15 *À gauche : machine à démêler les mèches (©L'Oréal). À droite : graphe de douceur d'un cheveu.* 35

1.16 *Évaluation de la tenue (a) statique d'une coiffure, par mesure de la détente de boucles au cours du temps, ou (b) dynamique, par la machine à perruques mobiles (©L'Oréal).* 36

1.17 *Coiffures réelles pour différents types de cheveux (©Free-Beauty-Tips.com, ©Schwarzkopf, ©naturalhair.org).* 38

1.18 *Morceau de surface paramétrique plaqué sur le maillage 3D de la tête, par la méthode de Kim et Neumann [KN02]. Le cercle placé sur la carte 2D (à gauche) par l'utilisateur servira de base sur le crâne pour une future mèche (à droite).* 39

1.19 *Modélisation de la chevelure par des surfaces NURBS [KH00] (à gauche). Représentation de la chevelure comme un volume de coques minces [KN00] (à droite).* 40

1.20 *Le modèle de mèches par cylindres généralisés de Yang et al. [YXYW00, XY01] : à gauche, pré-visualisation des cylindres généralisés et à droite, rendu final avec tracé de cheveux individuels à l'intérieur des mèches.* 41

1.21 *Ondulations et boucles générées dans la chevelure de manière procédurale par Yu [Yu01] (à gauche) et Choe et Ko [CK05a] (à droite).* 42

1.22 *Modélisation de coiffure multirésolution par Kim et Neumann [KN02]. À gauche, la chevelure de départ. À droite, la coiffure obtenue après multiples opérations de copier-coller d'un style torsadé sur les mèches, à différents niveaux de détail.* 42

1.23 *Modélisation de la chevelure comme un milieu fluide [HMT00].* 44

1.24 *Champ de vecteurs 3D pour définir le style de la coiffure [Yu01] (à gauche) et modélisation d'une tresse par des contraintes de trajectoire [CK05a] (à droite).* 45

1.25 *Comparaison entre des cheveux secs (a) et mouillés (b) [WGL04].* 46

1.26 *Cheveux capturés à partir de photographies [PBS04].* 47

1.27 *Chevelures réelles en mouvement (©ocregister.com).* 47

1.28 *À gauche, le système de coordonnées polaires adapté à un segment de cheveu. À droite, la simulation de 20 000 cheveux individuels utilisant des équations dynamiques angulaires [AUK92].* 49

1.29 *Cheveu défini comme une chaîne articulée ouverte [HMT01].* 50

1.30 *Chevelure représentée comme un milieu continu par Hadap et Magnenat-Thalmann [HMT01]. a) Points de vue eulérien et lagrangien. b) Animation d'une chevelure par [HMT01].* 51

1.31 *À gauche, les particules définissant les cheveux, les segments de droite indiquent l'orientation des particules. À droite, l'animation par des mouvements de tête de la chevelure ainsi représentée [BCN03].* 52

1.32 *À gauche, les bandes de triangles utilisées pour la détection de collision, dans le cas (a) d'une brosse et (b) d'une chevelure. À droite, le modèle épars en (c) de cheveux composé de liens statiques, et l'image correspondante en (d) avec le rendu de cheveux denses [CJY02].* 52

1.33 *À gauche, éléments définissant une mèche volumique déformable [PCP01]. Au centre, deux mèches quasi-parallèles en interpénétration, soumises à des frottements visqueux. À droite, collision entre deux mèches non parallèles.* 53
1.34 *Le modèle de mèche en couches [PCP01] (à droite) capture à la fois la continuité globale et les discontinuités locales que l'on peut observer dans une vraie chevelure en mouvement (à gauche).* 53
1.35 *Représentation par niveaux de détail de la chevelure [WLL+03]. À gauche : (a) bande de cheveux 2D, (b) groupe de cheveux 3D, (c) cheveu individuel, et algorithme de balayage de sphères pour la détection de collision : (d) balayage sur un point, (e) balayage sur une ligne, (f) balayage sur un rectangle [WLL+03]. À droite, cheveux longs et bouclés flottant dans le vent, représentés par différents niveaux de détail.* 54
1.36 *Effets de la lumière sur des cheveux réels de couleurs variées (©J. Gray).* 55
1.37 *Notations pour l'optique géométrique dans le cheveu [MJC+03].* 57
1.38 *Comparaison entre le modèle de Kajiya et Kay (à gauche), le modèle de Marschner (au milieu), et une chevelure réelle (à droite). Les reflets primaire et secondaire sont nettement visibles sur la photographie de droite (Figure tirée de [MJC+03]).* 58
1.39 *Importance de l'auto-ombrage sur l'apparence d'une chevelure. Comparaison entre des cheveux auto-ombrés (à gauche), et sans ombres portées (à droite) [LV00] (©Pixar Animation Studios).* 59
1.40 *Algorithme des cartes profondes d'ombre (Deep Shadow Maps) [LV00]. En haut : rayon de lumière issu d'une caméra placée à la source de lumière, qui passe au travers d'un pixel de la carte d'ombre, et vient illuminer la scène. En bas : la fonction τ de transmittance (ou de visibilité) correspondante, stockée dans chaque pixel de la carte d'ombre comme une fonction linéaire par morceaux.* 60
1.41 *Algorithme des cartes d'opacité pour l'auto-ombrage (Opacity Shadow Maps) [KN01]. Dans cette technique, le volume de la chevelure est partitionné de manière uniforme, perpendiculairement à la direction de la lumière, en un ensemble de cartes 2D qui stockent les valeurs alpha (à gauche). La chevelure ombrée résultante (à droite).* 60
1.42 *Rendu en temps-réel de longs cheveux en mouvement, en utilisant les nouvelles fonctionnalités des cartes graphiques [ZFWH04]. Si l'apparence de la chevelure est magnifique, le mouvement (pré-calculé) des cheveux reste relativement simple, et soumis à de faibles accélérations (©NVIDIA Corporation, 2004).* 61

3.1 *Comparaisons entre des animations réelles et des résultats de simulation.* 83
3.2 *À gauche, une chevelure réelle divisée en mèches. À droite, la modélisation d'une chevelure par un arbre adaptatif de mèches (AAM). L'AAM est un graphe orienté acyclique dont les nœuds représentent les masses des cheveux adjacents, et les arêtes les liens de contrôle entre les nœuds.* 84
3.3 *Relations entre le modèle géométrique multirésolution et l'AAM.* 85
3.4 *L'image de gauche illustre l'AAM. Les nœuds actifs sont représentés comme des sphères, et les segments actifs comme des cylindres. L'image de droite montre le rendu de cheveux correspondant.* 86
3.5 *Structure d'un graphe de chevelure.* 87
3.6 *Schéma d'intégration numérique de Lyard [Lya02].* 88
3.7 *Exemple d'une séquence adaptative : l'arbre de mèches subit des subdivisions et des fusions au cours du temps ; à chaque pas de temps, seuls certains nœuds peuvent être candidats à l'un des processus, de par la structure de l'arbre.* 89

3.8 *Le procédé de subdivision. 1. Initialement, seuls les nœuds grossiers sont activés. 2. Le nœud à l'intérieur du cercle vérifie le critère de subdivision. 3. Ses sous-nœuds sont activés. 4. Après quelques pas de temps, le nœud à l'intérieur du cercle est candidat à la subdivision. 5. L'AAM qui résulte de cette nouvelle subdivision.* 90

3.9 *Animation adaptative d'une queue de cheval, représentée à l'aide d'un unique AAM (une seule mèche grossière). En haut : géométrie multirésolution de la queue de cheval (trois niveaux de détail). En bas : séquence animée sur un mouvement de pencher en avant, au cours duquel l'AAM se subdivise, des pointes vers les racines, jusqu'au niveau de détail le plus fin, puis refusionne lorsque le mouvement ralentit, des racines vers les pointes. La séquence montre d'une part directement l'AAM, d'autre part le rendu final appliqué à cette animation, qui est calculé à chaque instant à partir des positions des nœuds au niveau de détail le plus fin (nœuds pas nécessairement actifs).* 91

3.10 *Réponse à la collision entre les cheveux et le corps, approché par une série de sphères.* . . . 92

3.11 *Les interactions entre mèches sont détectées efficacement, car les segments de mèches sont de simples cylindres. (a) Des forces de frottement sont générées entre deux segments parallèles ; (b) des forces de répulsion sont appliquées entre deux segments non parallèles ; (c) la réponse à la collision est calculée aux points les plus proches, et distribuée ensuite aux nœuds simulés comme des masses ponctuelles.* 93

3.12 *Animations finales. De haut en bas : des cheveux courts et lisses dans un mouvement de course ; des cheveux longs et épais dans un mouvement de pencher en avant ; des cheveux longs bouclés dans un mouvement de pencher en avant ; des cheveux courts et bouclés dans un mouvement de pencher en avant.* 96

4.1 *Une chevelure animée rendue sans auto-ombrage (à gauche), et la même chevelure ombrée par notre algorithme (à droite). La structure 3D, orientée selon la direction de la lumière, qui stocke les valeurs de densité de la chevelure et de transmittance (au centre). La simulation totale de la chevelure (incluant l'animation* et *le rendu) est calculée en temps interactif sur un CPU standard.* 99

4.2 *Taille minimale de la grille en fonction de la longueur des cheveux.* 101

4.3 *Une cellule de la carte d'ombre, contenant un point* $\mathbf{P}$*. Les paramètres* λ_i *indiquent la position de P à l'intérieur de la cellule, et seront utiles à l'étape de filtrage (voir Section 3.3). Par convention, chaque cellule stocke la quantité de lumière reçue par sa face arrière (en jaune),* i.e. *la quantité de lumière qui a traversé toutes les cellules précédentes ainsi que la cellule courante.* 101

4.4 *Correspondance entre l'espace objet et l'espace de la carte d'ombre. À cause de l'opérateur* modulo *dans la fonction de correspondance* $\mathbf{\Psi}$*, la première tranche de la grille (selon l'ordre indiqué par l'arrivée de la lumière) est identifiée par* $i_m in$*, qui ne représente pas nécessairement l'indice le plus petit. Les première et dernière tranches ont des indices consécutifs.* . . . 102

4.5 *Le pipeline complet du rendu.* 103

4.6 *L'effet du filtrage sur les valeurs de transmittance. À gauche : les ombres sans filtrage : des motifs réguliers alignés avec les axes de la grille sont visibles. À droite : les ombres après filtrage : les artefacts ont disparu, l'apparence de la chevelure est satisfaisante.* 105

4.7 *Une version parallélisée de notre algorithme d'auto-ombrage (exemple de deux processeurs se répartissant la charge de travail).* 106

4.8 *Notre algorithme d'auto-ombrage appliqué à une chevelure capturée à partir de photographies par la méthode de Paris et al. [PBS04]. La chevelure est composée de* 87 500 *cheveux (*1 123 K *segments) et son rendu a été effectué en 2 secondes.* 107

4.9 *Évaluation de la qualité de l'auto-ombrage, en utilisant différentes résolutions de la carte d'ombre. De gauche à droite :* 32^3 *avec* $\Delta s = 0,5$ *;* 64^3 *avec* $\Delta s = 0,2$ *;* 128^3 *avec* $\Delta s = 0,1$ *et* 256^3 *avec* $\Delta s = 0,05$. 107

4.10 *Une chevelure brune, lisse (*100 K *segments) et une chevelure rousse, bouclée (*200 K *segments) animées sur différents mouvements de danse, et rendues interactivement par notre algorithme.* 108

4.11 *Une vraie chevelure ombrée (à gauche) et notre modèle (à droite) sous des conditions d'éclairage similaires.* 109

4.12 *Résultats de rendus de chevelures, obtenus en combinant notre algorithme d'auto-ombrage avec le modèle d'illumination de Steve Marschner [MJC+03], et en prenant également en compte la translucidité des fibres pour le tracer des cheveux individuels : a) rendu que nous avons généré à partir d'une géométrie de chevelure capturée par la méthode de Wei et al. [WOQS05] ; b) rendu d'une chevelure générée par notre méthode de simulation statique présentée au Chapitre 6 ; c) d) et e) rendus de chevelures générées par notre méthode de simulation dynamique présentée au Chapitre 7.* 110

5.1 *Modèles précédents de fils en graphique. De gauche à droite : 1) modèle paramétrique pour le contrôle par positions clefs, qui a servi à animer le ressort composant le corps du chien de Toy Story [Bar97] ; 2) simulation de mailles tricotées par le modèle Lagrangien de spline [Nou99] ; 3) animation du modèle Lagrangien de spline avec prise en compte de l'élasticité en flexion et gestion des auto-contacts par pénalités [Len04] ; 4) modélisation d'un fil chirurgical par une tige de Cosserat statique [Pai02].* 117

5.2 *Déformations élémentaires sur un morceau de tige de Cosserat rectiligne.* 119

5.3 *À gauche : tige de Kirchhoff, avec l'un de ses repères matériels attaché à une section de la tige ; la courbure* κ_1 *(resp.* κ_2*) indique de combien tourne localement la tige autour de* $\mathbf{n}_1$ *(resp.* $\mathbf{n}_2$*), et la torsion* τ *indique de combien tourne localement la tige autour de l'axe tangent* $\mathbf{t}$*. À droite : une section transversale (grossie) de la tige, caractérisée par une forme elliptique.* 122

5.4 *Différentes configurations cinématiques d'une tige de Kirchhoff. Une tige présentant une torsion nulle et une seule courbure non nulle reste dans le plan (a), tandis qu'une tige présentant une torsion nulle et deux courbures non nulles et non constantes le long de la tige peut sortir du plan (b). Lorsque les deux courbures sont nulles et que la torsion est non nulle, la courbe moyenne de la tige est selon une droite (c).* 122

5.5 *Bilan des forces appliquées sur une portion infinitésimale de tige, comprise entre les sections droites* s *et* $s + \delta s$. 124

5.6 *L'exemple du pendule simple. À gauche : pendule paramétré par la position* (x, y, z) *d'une particule libre. La contrainte du fil inextensible liant la particule au support est ici modélisée par un ressort raide, qui va introduire des instabilités dans la dynamique du système. À droite : pendule paramétré par l'angle* θ *(angle entre la verticale et le fil). Dans ce cas, la contrainte du fil inextensible est déjà intégrée dans le modèle, il n'est pas nécessaire d'ajouter une contrainte externe.* 129

5.7 *Mascottes chevelues, ©Le 9 Télécom* 132

6.1 *Cheveux bouclés réels* vs. *synthétiques. De gauche à droite : configuration à l'équilibre d'un cheveu bouclé ; mèche générée de manière procédurale à partir de ce cheveu ; mèche réelle dont on s'est inspiré pour la modélisation ; chevelure complète composée d'une centaine de mèches ; chevelure réelle dont on s'est inspiré pour la modélisation.* 134

6.2 *Simulation d'un cheveu bouclé. De a) à c) : augmentation de la courbure naturelle κ_1^0 de la tige, la section étant circulaire ; d) : tige ayant les mêmes courbures et torsion naturelles qu'en c), mais qui présente une section elliptique.* 139

6.3 *Mise en évidence du phénomène de flambage d'une tige de Kirchhoff lorsque sa longueur augmente.* 140

6.4 *Mise en évidence de l'instabilité en flexion/torsion d'une tige de Kirchhoff lorsque l'une de ses courbures naturelles augmente.* 140

6.5 *Exemples de validations expérimentales du modèle statique* `Hair3D`*, réalisées dans les laboratoires de L'Oréal par Raphaël Eymery en été 2005 [Eym05]. Comparaison d'un vrai cheveu et du cheveu simulé (répondant aux mêmes caractéristiques géométriques et physiques) lorsque l'on fait varier a) la longueur du cheveu, b) l'angle d'encastrement du cheveu par rapport à l'axe normal au plan de l'étude. Les comparaisons ont été effectuées pour deux types de cheveu différents (asiatique et caucasien), et montrent la fidélité avec laquelle le modèle de tige reproduit le comportement réel du cheveu.* 141

6.6 *Sélection du cuir chevelu (en marron) sur un maillage 3D.* 143

6.7 *Génération automatique d'un modèle par mèches. De gauche à droite : une distribution aléatoire de particules (points bleus) sur le cuir chevelu ; répartition uniforme des particules sur la surface ; triangulation de l'ensemble de points 3D formés par les positions à l'équilibre des particules ; génération d'un cheveu directeur par triangle.* 144

6.8 *À gauche : collision entre un cheveu bouclé et une sphère. À droite : comparaison entre une chevelure complète sans collisions (a), et une chevelure pour laquelle l'ensemble des collisions (entre mèches, et entre les mèches et la tête), est correctement pris en compte (b). Remarquer en particulier la différence de volume entre les deux coiffures.* 145

6.9 *Mouillage (b), sélection par l'utilisateur des mèches pour la coupe (c), coupe finale (d) et séchage (e) d'une chevelure naturellement bouclée (a). Noter la différence de forme des mèches entre l'état mouillé et l'état sec (a-b ou d-e), causée en particulier par le changement du module d'élasticité entre les deux états. On observe également, à sec, que les mèches (sur la frange notamment) ont changé de forme du fait de la coupe : les boucles ont "remonté", comme dans la réalité.* 146

6.10 *Comparaisons entre le réel et le virtuel, sur deux exemples de mèches bouclées.* 147

6.11 *Comparaison du phénomène de pousse des cheveux entre le modèle simplifié de statique des poutres utilisé par Anjyo et al. [AUK92] (à gauche) et notre modèle basé sur les équations de Kirchhoff pour les tiges élastiques (à droite). Dans le premier cas, la gravité seule ne suffit pas à faire tomber les cheveux correctement sur la tête, et des forces supplémentaires devront être ajoutées par la suite pour obtenir une coiffure réaliste. Dans le second cas, le modèle non linéaire que nous utilisons reproduit parfaitement le phénomène se produisant lors de la pousse de cheveux : les cheveux poussent d'abord tout droit (a), puis ayant atteint une longueur seuil (b), ils se plient naturellement sous leur propre poids (b et c).* 148

6.12 *Comparaison entre des coiffures générées par notre logiciel et des coiffures réelles. À droite de chaque couple d'images : images réelles de cheveux (a) raides, (b et c) bouclés et (d) crépus. À gauche : résultats synthétiques correspondants, générés à partir de valeurs adéquates pour l'excentricité de la section du cheveu e et pour les courbures naturelles κ_i^0. Chacune des coiffures de synthèse a été réalisée à l'aide de notre logiciel en moins de 30 minutes.* 149

6.13 *Grossissement au vidéo-microscope des chevelures en b) et c) de la Figure 6.12. Comme prédit par notre modèle, les cheveux de la chevelure en b) (ici à gauche) ont une section ronde, tandis que les cheveux de la chevelure en c) (à droite) ont une section ronde à elliptique.* 150

7.1 *À gauche : une Super-Hélice. Au centre et à droite : simulation dynamique d'une chevelure ondulée, bouclée et lisse. Ces chevelures ont été animés en utilisant une centaine de cheveux guide, chaque cheveu guide étant une Super-Hélice composée de $N = 5$ éléments hélicoïdaux.* 152

7.2 *Instabilités de l'approche nodale : oscillations verticales d'une tige de Kirchhoff de 12 cm simulée par la méthode des différences finies proposée par Hou et al. [HKS98], (a) en l'absence de gravité (stable) et (b) en présence de gravité (divergence). (c) Tentative de simulation d'une chevelure complète animée grâce à quelques cheveux guide, animés comme des tiges de Kirchhoff discrétisées par différences finies ; étant donné que le modèle nodal de tige ne supporte pas les fortes courbures, il n'est pas possible avec ce modèle de planter les cheveux verticalement sur le crâne, ni de simuler des cheveux bouclés, ni encore d'imposer des mouvements rapides à la chevelure !...* 153

7.3 *Simulation de la collision (par des forces de pénalité) entre des tiges de Kirchhoff, simulées par l'approche nodale, et une sphère, en l'absence de gravité. Lorsque les déformations des tiges ne sont pas trop importantes (comme c'est le cas ici), cette méthode fonctionne de manière stable. Cependant, dès qu'on souhaite simuler de plus grandes déformations en courbures et en torsion, d'importantes instabilités numériques apparaissent (voir Figure 7.2, à droite).* 154

7.4 *À gauche : géométrie d'une Super-Hélice. À droite : quatre Super-Hélices caractérisées par des courbures et torsion naturelles différentes, et animées par le même mouvement d'oscillation horizontale : cheveu a) raide, b) ondulé, c) bouclé, et d) très bouclé. Dans cet exemple, chaque cheveu est simulé à l'aide de 10 éléments hélicoïdaux, chaque élément étant représenté d'une couleur différente.* 155

7.5 *À gauche : les différentes représentations adaptatives pour le volume englobant d'un morceau de mèche correspondant à un élément du cheveu guide de la mèche. À droite : le suivi de points les plus proches entre deux squelettes de volumes guide (cheveux lisses et bouclés).* 160

7.6 *Algorithme semi-interpolant pour la génération de la géométrie finale des cheveux à partir des trois cheveux guide : a) les cheveux sont interpolés à partir des positions des cheveux guide, depuis les pointes jusqu'aux racines ; b) les cheveux sont interpolés près des racines, mais pas près des pointes où des mèches distinctes apparaissent ; c) aucune interpolation, les cheveux restent groupés autour de leur cheveu guide principal d'où l'apparition de mèches disjointes ; d) l'interpolation à travers l'épaule droite du personnage est évitée grâce au critère de distance maximale entre les pointes des cheveux guide.* 164

7.7 *Rôle des différents paramètres du modèle d'habillage procédural de la chevelure à partir des cheveux guide, illustré sur deux mèches animées chacune par un cheveu guide. À gauche : influence de la distance entre les pointes de cheveux guide sur le degré d'interpolation pour le rendu des cheveux cible. Ce cœfficient vient se multiplier aux poids des cheveux guide pré-calculés à partir de leurs distances relatives sur le cuir chevelu. À droite : influence du paramètre α sur la forme interpolée entre deux mèches (d_i^e reste constante). Ce paramètre règle le niveau d'interpolation le long des mèches, un peu à la manière d'une fermeture éclair.* 165

7.8 *À gauche : mesure du rayon moyen r et estimation de l'excentricité e du modèle de Super-Hélice à partir des propriétés géométriques des vraies fibres de cheveux, observées au vidéo-microscope par un spécialiste (grossissement $\times 100$). À droite : mesure du rayon r_h et du pas Δ_h de la forme en hélice approximant la pointe de la mèche réelle de cheveux. Ces valeurs sont utilisées pour estimer la frisure naturelle du modèle de Super-Hélice représentant la mèche.* 166

7.9 *Ajustement de γ sur un mouvement oscillatoire vertical d'une mèche bouclée et disciplinée. À gauche, comparaison entre l'expérience réelle (en haut) et virtuelle (en bas). À droite, on compare la longueur apparente ℓ_A de la mèche entre les données réelles et les données simulées, pour différentes valeurs de γ. Dans ce cas précis, des résultats qualitativement similaires sont obtenus en choisissant $\gamma = 1.10^{-10}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$.* 168
7.10 *Angle θ formé entre l'orientation $\mathbf{h}$ de la fibre et sa vitesse relative $\mathbf{v_{rel}}$ par rapport à un objet extérieur en contact.* 168
7.11 *Validation du modèle de frottement, sur un mouvement de glissement d'une mèche lisse (à gauche) et bouclée (à droite). Le coefficient de frottement a été réglé de manière à correspondre au mieux au matériau sur lequel s'effectue le glissement (bois lisse à gauche, tissu en coton à droite).* 169
7.12 *À gauche : mise en évidence du flambage d'une mèche sur un mouvement oscillatoire vertical forcé, imposé à la racine. À droite : validation du modèle procédural de mèche et du modèle d'interaction entre groupes de cheveux au cours d'un mouvement rapide.* 169
7.13 *Comparaison entre une chevelure complète réelle et notre modèle, sur un mouvement rapide de rotation de la tête autour de l'axe vertical.* 170
7.14 *Résultats finaux, obtenus pour des cheveux longs et courts, lisses et bouclées, animés par différents mouvements.* 171
7.15 *À gauche et au milieu, démonstration de la plate-forme GrImage (couplée à la simulation de cheveux virtuels) au grand public lors de la Fête de la Science 2004. Les deux personnes réelles (à gauche) sont capturées en 3D par quatre caméras ; leurs clones virtuels, projetés sur l'écran (au milieu), et sur l'un desquels on a apposé une chevelure virtuelle dynamique, reproduisent en temps-réel les mouvements des vraies personnes : la chevelure virtuelle suit en temps-réel le mouvement capturé pour la tête. À droite, simulation temps-réel d'une chevelure auto-ombrée grâce à une version parallélisée et optimisée de notre algorithme présenté au Chapitre 4.* 174

A.1 *Base de Frenet $(\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s))$ et plan osculateur de la courbe $\mathbf{\Gamma}(s)$ au point d'abscisse s. La courbure locale $\kappa_g(s)$ est définie comme l'inverse du rayon du cercle osculateur en s.* . . 179

B.1 *Elastica d'Euler.* 181

C.1 *Pendule double contraint à se déplacer dans le plan suivant les rotations d'angles θ_1 et θ_2.* . 184
C.2 *Principe de la corde vibrante : corde maintenue pratiquement tendue par des forces appliquées en ses deux extrémités, et soumise à de faibles déflexions selon l'axe transverse y.* . . . 186
C.3 *Système de corde vibrante discrète, à nombre fini de degrés de liberté y_i.* 190

D.1 *Rotation à vitesse constante autour de $\mathbf{\Psi}$ de la base $(\mathbf{a},\mathbf{b})$.* 194
D.2 *Une tige de Kirchhoff caractérisée par des courbures et torsion $(\kappa_i)_{i=1,2,3}$ constantes prend la forme d'une hélice circulaire, de rayon r et de pas Δ. Le vecteur de Darboux $\mathbf{\Omega}$, constant dans ce cas, permet de définir une base $(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ adaptée à la tige [AP07]* 195

LISTE DES TABLEAUX

1.1 *Quelques propriétés géométriques du cheveu, en fonction du groupe ethnique d'appartenance [Hrd73, FHB+03].* 21
1.2 *Propriétés mécaniques du cheveu à sec.* 25
1.3 *Analyse des modèles dynamiques de cheveux individuels. Évaluation de chaque modèle, selon les critères suivants : rigidité en flexion, rigidité en torsion, contrainte d'inextensibilité, prise en compte de la frisure, et capacité à prendre en compte correctement des forces extérieures.* 50

2.1 *Classification des modèles existants pour l'animation de corps déformables.* 71

3.1 *Performances de l'algorithme adaptatif.* 94

4.1 *Performance détaillée du processus de rendu (calcul de la densité, de la transmittance, du filtrage, et du rendu final) d'une chevelure lisse composée de* 100 K *segments et d'une chevelure bouclée composée de* 200 K *segments. Les résultats sont exprimés en secondes par image ; les calculs ont été effectués sur un CPU Intel P4 à une fréquence de 3 GHz.* 108
4.2 *Performances détaillée de la simulation (animation, rendu et collisions entre cheveux) obtenues pour deux types de chevelures composées chacune de 134 mèches animées : une chevelure lisse (*100 K *segments rendus) et une chevelure bouclée (*200 K *segments rendus). Les résultats sont exprimés en secondes par image ; les calculs ont été effectués sur un CPU Intel P4 à une fréquence de 3 GHz.* 108

6.1 *Caractéristiques des vrais échantillons de cheveux utilisés pour la validation du simulateur* `Hair3D` *[Eym05].* 141

7.1 *Propriétés structurelles et physiques de cheveux réels, mesurées sur quatre types de cheveux appartenant à différents groupes ethniques.* 167

BIBLIOGRAPHIE

[AMB01] M.-C. Auzou and S. Melchior-Bonnet. *Les vies du cheveu*. Gallimard, 2001.

[Ant95] S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer Verlag, 1995.

[AP88] U. Ascher and L. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, 1988.

[AP07] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry : from hair curls to the nonlinear response of shells*. Oxford University Press, À paraître en 2007.

[AUK92] K. Anjyo, Y. Usami, and T. Kurihara. A simple method for extracting the natural beauty of hair. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'92 conference)*, pages 111–120, August 1992.

[BAC+05] F. Bertails, B. Audoly, M.-P. Cani, B. Querleux, F. Leroy, and J.-L. Lévêque. Modélisation de coiffures naturelles à partir des propriétés physiques du cheveu. In *Journées Francophones d'Informatique Graphique (AFIG)*, Strasbourg, France, November 2005. AFIG / EG-France.

[BAC+06] F. Bertails, B. Audoly, M.-P. Cani, B. Querleux, F. Leroy, and J.-L. Lévêque. Superhelices for predicting the dynamics of natural hair. In *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'06 conference)*, pages 1180–1187, August 2006.

[Ban94] D. Banks. Illumination in diverse codimensions. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'94 conference)*, pages 327–334, 1994.

[BAQ+05] F. Bertails, B. Audoly, B. Querleux, F. Leroy, J.-L. Lévêque, and M.-P. Cani. Predicting natural hair shapes by solving the statics of flexible rods. In J. Dingliana and F. Ganovelli, editors, *Eurographics'05 (short papers)*. Eurographics, August 2005. Eurographics'05 (short papers).

[Bar96] D. Baraff. Linear-time dynamics using lagrange multipliers. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'96 conference)*, pages 137–146, 1996.

[Bar97] R. Barzel. Faking dynamics of ropes and springs. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 17(3) :31–39, 1997.

[BCN03] Y. Bando, B-Y. Chen, and T. Nishita. Animating hair with loosely connected particles. *Computer Graphics Forum*, 22(3) :411–418, 2003. Proceedings of Eurographics'03.

[BJ05] J. Barbic and D. James. Real-time subspace integration for st. venant-kirchhoff deformable models. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :982–990, 2005.

[BKCN03] F. Bertails, T-Y. Kim, M-P. Cani, and U. Neumann. Adaptive wisp tree - a multiresolution control structure for simulating dynamic clustering in hair motion. In *ACM SIGGRAPH - EG Symposium on Computer Animation (SCA'03)*, pages 207–213, July 2003.

[BMC05] F. Bertails, C. Ménier, and M-P. Cani. A practical self-shadowing algorithm for interactive hair animation. In *Proc. Graphics Interface*, pages 71–78, May 2005.

[BR00] J. Berney and J. Redd. A tale of fur, costumes, performance, and integration. *SIGGRAPH'00 Course Notes*, 2000.

[BS91] H. Bustard and R. Smith. Investigation into the scattering of light by human hair. *Applied Optics*, 24(30) :3485–3491, 1991.

[BW92] D. Baraff and A. Witkin. Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'92 conference)*, pages 303–308, 1992.

[BW98] D. Baraff and A. Witkin. Physically based modeling. *SIGGRAPH'98 Course Notes*, 1998.

[BW05] C. Bouillon and J. Wilkinson. *The Science of Hair Care, second edition*. Taylor & Francis, 2005.

[CC09] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909.

[CCK05] B. Choe, M. Choi, and H-S. Ko. Simulating complex hair with robust collision handling. In *ACM SIGGRAPH - EG Symposium on Computer Animation (SCA'05)*, pages 153–160, August 2005.

[Cho03] N. Chouaïeb. *Kirchhoff's problem of helical solutions of uniform rods and their stability properties*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2003.

[CJY02] J. Chang, J. Jin, and Y. Yu. A practical model for hair mutual interactions. In *ACM SIGGRAPH - EG Symposium on Computer Animation (SCA'02)*, pages 73–80, July 2002.

[CK05a] B. Choe and H-S. Ko. A statiscal wisp model and pseudophysical approaches for interactive hairstyle generation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(2) :153–160, March 2005.

[CK05b] M. Choi and H.-S. Ko. Modal warping : Real-time simulation of large rotational deformation and manipulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(1) :91–101, 2005.

[CSDI99] L. Chen, S. Saeyor, H. Dohi, and M. Ishizuka. A system of 3d hairstyle synthesis based on the wisp model. *The Visual Computer*, 15(4) :159–170, 1999.

[DDCB01] G. Debunne, M. Desbrun, M.-P. Cani, and A. H. Barr. Dynamic real-time deformations using space and time adaptive sampling. In Eugene Fiume, editor, *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'01 conference)*, pages 31–36. ACM Press / ACM SIGGRAPH, 2001.

[Deb00] G. Debunne. *Animation multirésolution d'objets déformables en temps-réel, Application à la simulation chirurgicale*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, December 2000.

[Des97] M. Desbrun. *Modélisation et Animation de Matériaux Hautement Déformables en Synthèse d'Images*. PhD thesis, INP Genoble, December 1997.

[DKY+00] Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, T. Okita, and T. Nishita. A simple, efficient method for realistic animation of clouds. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'00 conference)*, pages 19–28. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.

[DMTKT93] A. Daldegan, N. Magnenat-Thalmann, T. Kurihara, and D. Thalmann. An integrated system for modeling, animating and rendering hair. *Computer Graphics Forum*, 12(3) :211–221, 1993.

[Dur04] D. Durville. Modelling of contact-friction interactions in entangled fibrous materials. In *Procs of the Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI)*, September 2004.

[Eym05] R. Eymery. Hair3d : valorisation et validation. Master's thesis, Faculté de Pharmacie, September 2005.

[Fea87] R. Featherstone. *Robot Dynamics Algorithms*. Kluwer Academic Publishers, 1987.

[Fer02] J. Ferreira. Cours de mécanique analytique, 2002. http ://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/ ferreira/teaching.html.

[FHB+03] A. Franbourg, P. Hallegot, F. Baltenneck, C. Toutain, and F. Leroy. Current research on ethnic hair. *J. Amer. Acad. Dermatol.*, 48 :S115–S118, January 2003.

[Fon01] M. Fong. Animating monster fur. *SIGGRAPH'01 Course Notes*, 2001.

[FP63] R. Fletcher and M. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *The Computer Journal*, 6(2) :163–168, 1963.

[FS01] R. Falk and L. Sande. Shrek : The story behind the screen. *SIGGRAPH'01 Course Notes*, 2001.

[Gar01] J. Garrigues. Cours de mécanique analytique, 2001. http ://esm2.imt-mrs.fr/gar/efhtml/index.html.

[GGL87] A. Guiolet, J.-C. Garson, and J.-L. Lévêque. Study of the optical properties of human hair. *International Journal of Cosmetic Science*, 9 :111–124, 1987.

[GKS02] E. Grinspun, P. Krysl, and P. Schröder. Charms : A simple framework for adaptive simulation. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'02 conference)*, 21(3) :281–290, July 2002.

[GMTT89] J.-P. Gourret, N. Magnenat-Thalmann, and D. Thalmann. Simulation of object and human skin formations in a grasping task. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'89 conference)*, pages 21–30, New York, NY, USA, 1989. ACM Press.

[Gol97] D. Goldman. Fake fur rendering. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'97 conference)*, pages 127–134, 1997.

[Gra97] J. Gray. World of hair, 1997. http ://www.pg.com/science/haircare/hair_twh_toc.htm.

[GSML02] S. Grabli, F. Sillion, S. Marschner, and J. Lengyel. Image-based hair capture by inverse lighting. In *Proc. Graphics Interface*, pages 51–58, May 2002.

[Had03] S. Hadap. *Hair Simulation*. PhD thesis, Université de Genève, January 2003.

[HKS98] T. Hou, I. Klapper, and H. Si. Removing the stiffness of curvature in computing 3-d filaments. *J. Comput. Phys.*, 143(2) :628–664, 1998.

[HMT00] S. Hadap and N. Magnenat-Thalmann. Interactive hair styler based on fluid flow. In *EG workshop on Computer Animation and Simulation (EG CAS'00)*, pages 87–100, August 2000.

[HMT01] S. Hadap and N. Magnenat-Thalmann. Modeling dynamic hair as a continuum. *Computer Graphics Forum*, 20(3) :329–338, 2001. Proceedings of Eurographics'01.

[HR04] B. Hernandez and I. Rudomin. Hair paint. In *Computer Graphics International (CGI'04)*, pages 578–581, June 2004.

[Hrd73] D. Hrdy. Quantitative hair form variation in seven populations. *American Journal of Physical Anthropology*, 39 :7–18, 1973.

[JP02] D. James and D. Pai. Dyrt : Dynamic response textures for real time deformation simulation with graphics hardware. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'02 conference)*, 21(3) :582 – 585, July 2002.

[KAT93] T. Kurihara, K. Anjyo, and D. Thalmann. Hair animation with collision detection. In *Proceedings of Computer Animation'93*, pages 128–138. Springer, 1993.

[Ken01] S. Kent. *The Making of Final Fantasy. The Spirits Within*. Brady Publishing, Indiana, 2001.

[KH84] J. Kajiya and B. Von Herzen. Ray tracing volume densities. In *Proceedings of the 11th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 165–174. ACM Press, 1984.

[KH00] C. Koh and Z. Huang. Real-time animation of human hair modeled in strips. In *EG workshop on Computer Animation and Simulation (EG CAS'00)*, pages 101–112, September 2000.

[KH01] C. Koh and Z. Huang. A simple physics model to animate human hair modeled in 2D strips in real time. In *EG workshop on Computer Animation and Simulation (EG CAS'01)*, pages 127–138, September 2001.

[KHS04] M. Koster, J. Haber, and H-P. Seidel. Real-time rendering of human hair using programmable graphics hardware. In *Computer Graphics International (CGI'04)*, pages 248–256, June 2004.

[Kim02] T-Y. Kim. *Modeling, Rendering and Animating Human Hair*. PhD thesis, University of Southern California, 2002.

[KK89] J. Kajiya and T. Kay. Rendering fur with three dimensional textures. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'89 conference)*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 271–280, New York, NY, USA, 1989. ACM Press.

[KN00] T.-Y. Kim and U. Neumann. A thin shell volume for modeling human hair. In *Computer Animation 2000*, IEEE Computer Society, pages 121–128, 2000.

[KN01] T-Y. Kim and U. Neumann. Opacity shadow maps. In *Rendering Techniques 2001*, Springer, pages 177–182, July 2001.

[KN02] T-Y. Kim and U. Neumann. Interactive multiresolution hair modeling and editing. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'02 conference)*, 21(3) :620–629, July 2002.

[KTN97] W. Kong, H. Takahashi, and M. Nakajima. Generation of 3d hair model from multiple pictures. *Proceedings of Multimedia Modeling*, pages 183–196, 1997.

[Lam91] J. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems : the initial value problem*. John Wiley, 1991.

[Len04] J. Lenoir. *Modèle déformable 1D pour la simulation physique temps-réel*. PhD thesis, LIFL, Université Lille I, November 2004.

[LH03] W. Liang and Z. Huang. An enhanced framework for real-time hair animation. In *Pacific Graphics*, pages 467–471, September 2003.

[LHM95] A. Luciani, A. Habibi, and E. Manzotti. A multi-scale physical model of granular materials. In *Proc. Graphics Interface*, pages 136–146, May 1995.

[LK01] D-W. Lee and H-S. Ko. Natural hairstyle modeling and animation. *Graphical Models*, 63(2) :67–85, March 2001.

[LL76] L. Landau and E. Lipshitz. *Mechanics (Course of theoretical physics ; v. 1)*. Oxford, 1976.

[L'O05] L'Oréal. Hair science, 2005. http ://www.hair-science.com.

[LTT91] A. M. LeBlanc, R. Turner, and D. Thalmann. Rendering hair using pixel blending and shadow buffers. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 2(3) :92–97, 1991.

[Luc85] A. Luciani. *Un outil informatique de création d'images animées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, November 1985.

[LV00] T. Lokovic and E. Veach. Deep shadow maps. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'00 conference)*, pages 385–392. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.

[Lya02] E. Lyard. Animation de tissu en temps réel par modèles physiques. Rapport de DEA, ENSIMAG, INP Grenoble, June 2002.

[Mes02] P. Meseure. *Animation basée sur la physique pour les environnements interactifs temps-réel*. Habilitation à diriger les recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, December 2002.

[Mit96] D. Mitchell. Consequences of stratified sampling in graphics. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'96 conference)*, pages 277–280, 1996.

[MJC+03] S. Marschner, H. Jensen, M. Cammarano, S. Worley, and P. Hanrahan. Light scattering from human hair fibers. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'03 conference)*, 22(3) :281–290, July 2003.

[MKBR04] T. Mertens, J. Kautz, P. Bekaert, and F. Van Reeth. A self-shadow algorithm for dynamic hair using density clustering. In *Proceedings of Eurographics Symposium on Rendering*, pages 173–178, 2004.

[MKIA04] X. Mao, H. Kato, A. Imamiya, and K. Anjyo. Sketch interface based expressive hairstyle modelling and rendering. In *Computer Graphics International (CGI'04)*, pages 608–611, June 2004.

[Mon92] J. Monaghan. Smoothed particles hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30(543) :543–574, 1992.

[MP89] G. Miller and A. Pearce. Globular dynamics : A connected particle system for animating viscous fluids. *Computers and Graphics*, 13(3) :305–309, 1989.

[MTH00] N. Magnenat-Thalmann and S. Hadap. State of the art in hair simulation. In *International Workshop on Human Modeling and Animation*, Korea Computer Graphics Society, pages 3–9, June 2000.

[NdP98] I. Neulander and M. Van de Panne. Rendering generalized cylinders with paintstrokes. In *Graphics Interface*, pages 233–242, 1998.

[Ney98] F. Neyret. Modeling animating and rendering complex scenes using volumetric textures. *IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics*, 4(1) :55–70, January 1998.

[NM01] M. Nulkar and K. Mueller. Splatting with shadows. *Volume Graphics*, pages 35–50, 2001.

[NMK+05] A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman, and M. Carlson. *Physically Based Deformable Models in Computer Graphics*, volume STAR 4 of *STAR report*. The Eurographics Association, EG'05, Dublin, Ireland, September 2005.

[Noc01] O. Nocent. *Animation dynamique de corps déformables continus : application à la simulation de textiles tricotés.* Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, Reims, France, December 2001.

[Nou99] J.-M. Nourrit. *Modélisation, animation et visualisation de textiles à base de mailles*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, January 1999.

[NT04] P. Noble and W. Tang. Modelling and animating cartoon hair with nurbs surfaces. In *Computer Graphics International (CGI'04)*, pages 60–67, June 2004.

[Pai02] D. Pai. Strands : Interactive simulation of thin solids using cosserat models. *Computer Graphics Forum*, 21(3) :347–352, 2002. Proceedings of Eurographics'02.

[PB81] S. Platt and N. Badler. Animating facial expressions. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'81 conference)*, volume 15, pages 245–252, 1981.

[PB03] D. Patrick and S. Bangay. A lightwave 3d plug-in for modeling long hair on virtual humans. In *Proceedings of the 2nd international conference on Computer graphics, virtual Reality, visualisation and interaction in Africa*, pages 161–187. ACM Press, 2003.

[PBL04] D. Patrick, S. Bangay, and A. Lobb. Modelling and rendering techniques for african hairstyles. In *Proceedings of the 3rd international conference on Computer graphics, virtual reality, visualisation and interaction in Africa*, pages 115–124. ACM Press, 2004.

[PBS04] S. Paris, H. Briceño, and F. Sillion. Capture of hair geometry from multiple images. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'04 conference)*, pages 712–719, 2004.

[PCP01] E. Plante, M-P. Cani, and P. Poulin. A layered wisp model for simulating interactions inside long hair. In *EG workshop on Computer Animation and Simulation (EG CAS'01)*, Computer Science, pages 139–148. Springer, September 2001.

[PCP02] E. Plante, M-P. Cani, and P. Poulin. Capturing the complexity of hair motion. *Graphical Models (Academic press)*, 64(1) :40–58, January 2002. submitted Nov. 2001, accepted, June 2002.

[Pix04a] Pixar. The incredibles, 2004. http ://www.moviemistakes.com/film4565.

[Pix04b] Pixar. Inside the incredibles, 2004. http ://www.computerarts.co.uk/in_depth/features/inside_the_incredibles.

[PW89] A. Pentland and J. Williams. Good vibrations : modal dynamics for graphics and animation. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'89 conference)*, volume 23, pages 215–222, New York, NY, USA, 1989. ACM Press.

[QT96] H. Qin and D. Terzopoulos. D-nurbs : A physics-based framework for geometric design. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(1) :85–96, 1996.

[Rai00] J.-M. Raimond. Mécanique analytique, 2000. http ://cel.ccsd.cnrs.fr/cours/cel-27/cel-27.html.

[RCFC03] L. Raghupathi, V. Cantin, F. Faure, and M.-P. Cani. Real-time simulation of self-collisions for virtual intestinal surgery. In Nicholas Ayache and Hervé Delingette, editors, *Proceedings of the International Symposium on Surgery Simulation and Soft Tissue Modeling*, number 2673 in Lecture Notes in Computer Science, pages 15–26. Springer-Verlag, 2003.

[RCT91] R. Rosenblum, W. Carlson, and E. Tripp. Simulating the structure and dynamics of human hair : Modeling, rendering, and animation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 2(4) :141–148, 1991.

[Red02] S. Redon. *Algorithmes de simulation dynamique interactive d'objets rigides*. Thèse, Université d'Evry-Val d'Essonne, France, October 2002.

[Ree83] W. Reeves. Particle systems : a technique for modeling a class of fuzzy objects. *ACM Transactions on Graphics*, 2(2) :91–108, 1983.

[Res05] Wolfram Research. Mathematica, 2005. http ://www.wolfram.com/.

[RGL05] S. Redon, N. Galoppo, and M. Lin. Adaptive dynamics of articulated bodies. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'05 conference)*, 24(3) :936–945, 2005.

[RH96] J. Rankin and R. Hall. A simple naturalistic hair model. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 30(1) :5–9, 1996.

[RKC02] S. Redon, A. Kheddar, and S. Coquillart. Fast continuous collision detection between rigid bodies. In *Computer Graphics Forum (Proceedings of the Eurographics Conference)*, volume 21, pages 279–288, 2002.

[Rob02] C. Robbins. *Chemical and Physical Behavior of Human Hair*. 4th ed. Springer, 2002.

[SGF77] R. Stamm, M. Garcia, and J. Fuchs. The optical properties of human hair. i. fundamental considerations and goniophotometric curves. *J. Soc. Cosmet. Chem.International Journal of Cosmetic Science*, 28 :571–599, 1977.

[SKHK95] A. Syed, A. Kuhajda, A. Hassan, and A. Kaleem. African-american hair. *Cosmetics and Toiletries Magazine*, 110 :41–48, October 1995.

[Squ00] Pictures Square. Final fantasy : The spirit's within, 2000. http ://www.abc.net.au/triplej/review/film/s350149.htm.

[Sta95] J. Stam. *Multi-Scale Stochastic Modelling of Complex Natural Phenomena*. PhD thesis, University of Toronto, 1995.

[Sta97] J. Stam. Stochastic dynamics : Simulating the effects of turbulence on flexible structures. *Computer Graphics Forum*, 16(3) :159–164, 1997.

[TKH+05] M. Teschner, S. Kimmerle, B. Heidelberger, G. Zachmann, L. Raghupathi, A. Fuhrmann, M.-P. Cani, F. Faure, N. Magnenat-Thalmann, W. Strasser, and P. Volino. Collision detection for deformable objects. *Computer Graphics Forum*, 24(1) :61–81, March 2005.

[TMH+05] M. Teschner, D. Manocha, B. Heidelberger, N. Govindaraju, G. Zachmann, J. Mezger, and A. Fuhrmann. *Collision handling in dynamic simulation environments*, volume Tutorial 2 of *Tutorial series*. The Eurographics Association, EG'05, Dublin, Ireland, September 2005.

[TPF89] D. Terzopoulos, J. Platt, and K. Fleischer. Heating and melting deformable models (from goop to glop). In *Proc. Graphics Interface*, pages 219–226, May 1989.

[Tur92] G. Turk. Re-tiling polygonal surfaces. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'92 conference)*, pages 55–64, New York, NY, USA, 1992. ACM Press.

[WBK+06] K. Ward, F. Bertails, T.-Y. Kim, S. Marschner, M.-P. Cani, and M. Lin. A survey on hair modeling : styling, simulation, and rendering. *IEEE TVCG (to appear)*, 2006.

[WGL04] K. Ward, N. Galoppo, and M. Lin. Modeling hair influenced by water and styling products. In *Proceedings of Computer Animation and Social Agents (CASA'04)*, pages 207–214, May 2004.

[WL03] K. Ward and M. Lin. Adaptive grouping and subdivision for simulating hair dynamics. In *Proceedings of Pacific Graphics'03*, pages 234–243, September 2003.

[WLL+03] K. Ward, M. Lin, J. Lee, S. Fisher, and D. Macri. Modeling hair using level-of-detail representations. In *Proceedings of Computer Animation and Social Agents (CASA'03)*, pages 41–47, May 2003.

[WOQS05] Y. Wei, E. Ofek, L. Quan, and H.-Y. Shum. Modeling hair from multiple views. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'05 conference)*, pages 816–820, 2005.

[WS92] Y. Watanabe and Y. Suenaga. A trigonal prism-based method for hair image generation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(1) :47–53, 1992.

[WW90] A. Witkin and W. Welch. Fast animation and control of non-rigid structures. In *Computer Graphics Proceedings (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'90 conference)*, pages 243–252, 1990.

[WY04] T. Wang and X. Yang. Hair design based on the hierarchical cluster hair model. *Geometric modeling : techniques, applications, systems and tools*, pages 330–359, 2004.

[XY01] Z. Xu and X. Yang. V-hairstudio : an interactive tool for hair design. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 21(3) :36–42, May 2001.

[Yu01] Y. Yu. Modeling realistic virtual hairstyles. In *Proceedings of Pacific Graphics'01*, pages 295–304, October 2001.

[YXYW00] X. Yang, Z. Xu, J. Yang, and T. Wang. The cluster hair model. *Graphics Models and Image Processing*, 62(2) :85–103, March 2000.

[ZB05] Y. Zhu and R. Bridson. Animating sand as a fluid. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH'05 conference)*, 24(3) :965–972, July 2005.

[ZC03] C. Zhang and R. Crawfis. Shadows and soft shadows with participating media using splatting. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9(2) :139–149, 2003.

[ZFWH04] C. Zeller, R. Fernando, M. Wloka, and M. Harris. Programming graphics hardware. In *Eurographics - Tutorials*, September 2004.

[Zvi86] C. Zviak. *The Science of Hair Care*. Marcel Dekker, 1986.

Simulation de Chevelures Virtuelles

Du fait de l'importance accrue des personnages virtuels dans tous les secteurs du loisir numérique, la simulation de chevelures est devenue, ces dernières années, un thème de recherche très actif en informatique graphique. Par ailleurs, la simulation physique de cheveux attire de plus en plus l'attention des cosmétologues, qui voient dans le prototypage virtuel un moyen efficace pour mettre au point des produits capillaires.

Cette thèse s'attaque à deux grandes difficultés antagonistes liées à la simulation de chevelures : d'une part, la simulation en temps interactif d'une chevelure complète ; d'autre part, le réalisme physique de la forme et du mouvement d'une chevelure.

Dans un premier temps, nous élaborons de nouveaux algorithmes visant à réduire le coût de calcul inhérent aux méthodes classiques d'animation de chevelures. Nos approches exploitent pour la première fois l'animation multi-résolution et le rendu volumique de longs cheveux, donnant lieu à des simulations interactives.

Dans un second temps, nous proposons un modèle physiquement réaliste de chevelure, réalisé en collaboration avec des spécialistes en modélisation mécanique et en cosmétologie. Nous présentons tout d'abord le modèle mécanique précis de cheveu unique, issu de la théorie de Kirchhoff sur les tiges élastiques, dont nous avons participé à l'élaboration au cours de ce partenariat. Étendu à l'échelle de la chevelure complète, ce modèle est ensuite appliqué à la génération réaliste de coiffures naturelles statiques, puis à la simulation dynamique de chevelures d'origines ethniques variées, avant d'être finalement validé à travers un ensemble de comparaisons avec le réel.

Mots-clefs : cheveux, personnage virtuel, simulation de phénomènes naturels, modèle physique, animation multirésolution, rendu volumique, mécanique lagrangienne, tige de Kirchhoff, synthèse d'images.

Simulation of Virtual Hair

Due to the recent wide spread use of virtual characters in many fields of the entertainment industry, hair simulation has become a very active research topic in computer graphics. In addition, the physical simulation of hair is attracting greater attention from cosmetic experts, who perceive virtual prototyping as an effective means for developing hair care products.

This thesis focuses on two major issues related to the simulation of hair : The interactive simulation of a full head of hair, and the physical realism of the shape and motion of hair.

We first develop new algorithms aimed at reducing the cost of calculation inherent in traditional methods for hair simulation. Our approaches exploit for the first time a multi-resolution scheme for hair animation as well as volumic rendering of long hair, leading to interactive simulations of full heads of hair.

Secondly, we propose a realistic physically based model for hair, realized in collaboration with experts in the fields of mechanical modeling and cosmetology. Within this partnership, we took part to the development of an accurate mechanical model for a single hair strand, which is based upon the theory of Kirchhoff on elastic rods. In the following of our work, this model is scaled to a full head of hair, and then applied to the realistic generation of static natural hairstyles, as well as to the dynamic simulation of hair from various ethnic origins. Finally, we validate our approach through a series of comparisons between virtual and real hair.

Keywords : hair, virtual character, simulation of natural phenomena, physically based model, multiresolution animation, volume rendering, lagrangian mechanics, Kirchhoff's rod, computer graphics.

École Doctorale de Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique
Projet EVASION, Laboratoire GRAVIR - IMAG/INRIA,
INRIA Rhône-Alpes, 655 av. de l'Europe, 38 334 Saint-Ismier Cedex, France